SÉRIE A, N° 4560
N° D'ORDRE 5407

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Moshé FLATO

1re THÈSE — **« Symétries de type lorentzien et interactions fortes »**

2e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 15 juin 1965 devant la Commission d'examen

M. A. LICHNEROWICZ — *Président*
Mme M. A. TONNELAT, M. J. P. MATHIEU — *Examinateurs*
M. G. RIDEAU, M. J. P. VIGIER — *Invités*

1967
Gauthier-Villars Editeur
PARIS

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534911_0023

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

PROFESSEURS

Doyen ..... M. ZAMANSKY

BRELOT	T	Analyse supérieure.
PRENANT	T	Anatomie et histologie comparée.
GRASSE	T	Evolution des êtres organisés
PRÉVOST	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralo & cristallo.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végé (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique ENS.
CARTAN	T	Mathématiques ENS.
LAFFITTE	T	Chimie générale.
N...	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du globe.
Mlle COUSIN	T	Biologie animale SPCN.
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
BOCQUET	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique ENS.
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie SPCN & sédiment (Orsay).
GAUTHERET	T	Biologie végétale PCB.
LUCAS R.	T	Recherches physiques.
THOMAS A.	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique enseignement.
SOLEILLET	T	Physique PCB.
FORTIER	T	Mécanique exp. des fluides.
DRACH	T	Zoologie.
QUENEY	T	Météo & dynamique atmos.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale SPCN.
Mlle CAUCHOIS	T	Chimie physique.
THELLIER	T	Physique du globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale Orsay.
GRIVET	T	Radioélectricité Orsay.
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL	T	Arith & théorie des nombres.
QAGLET	T	Chimie organique.
CUENIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromoléculaire.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Géologie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffrac. élec.
WIEMANN	T	Chimie organ. & structu.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES	T	Théorie physique.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéral. & cristal.
J. P. MATHIEU	T	Physique optique.
COUTEAUX	T	Cytologie.
MAY	T	Zoologie.
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.
FELDMANN	T	Biologie végétale marine.
GUINIER	T	Physique des solides (Orsay).
JOST	T	Physiologie comparée.
FORTET	T	Calcul des probabilités et physiques mathématiques.
SCHWARTZ	T	Calcul dif & Intégral.
CHOUARD	T	Physiologie végétale.
MALAVARD	T	Aviation (technique aéron).
NORMANT	T	Synthèse organique.
BENARD	T	Chimie minérale.
BUVAT	T	Botanique ENS.
DUGUE	T	Statistique mathématique.
SOULAIRAC	T	Psychophysiologie.
ULRICH	T	Physiologie végé. appli.
MARÉCHAL	T	Optique théo & appli.
KIRRMANN	T	Théories chimiques.
CHADEFAUD	T	Botanique.
Mlle LE BRETON	T	Physio de la nutrition.
LELONG	T	Appli. de l'ana. à la géom.
DEVILLERS	T	Anatomie & histo. compa.
EHRESMANN	T	Topologie algébrique.
FRANÇON	T	Physique S. P. C. N.
GLANGEAUD	T	Géogra. phys. & géol.
GODEMENT	T	Mathématiques M. G. P.
PISOT	T	Technique math. de la phys.
ROCH	T	Géologie.
SCHATZMAN	T	Astrophysique.
TERMIER	T	Géologie générale.
ZAMANSKY	T	Mathématiques générales.
LENNUIER	T	Physique M. G. P.
RIZET	T	Génétique (Orsay).
ROUTHIER	T	Géologie appliquée.
Mme TONNELAT	T	Physique théorique.
DIXMIER	T	Mathématiques M. P. C.
SOUCHAY	T	Chimie générale.
AIGRAIN	T	Electrotechn. géné.
BRUSSET	T	Chimie systématique.
M. LEVY	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme CHAIX	T	Chimie biologique.
Mme HUREL-PY	T	Biologie végétale P. C. B.
PANNETIER	T	Chimie générale.
BRUN	T	Mécanique des fluides I.
LEDERER	T	Chimie biologique (Orsay).
Mme DUBREIL	T	Mathématiques (agréga.).
Mme LELONG	T	Math. II E. N. S.
BELLAIR	T	Géologie S. P. C. N.
COTTE	T	Physique électricité.
DUBOIS J. E.	T	Chimie organique.
LAMOTTE	T	Zoologie E. N. S.
MICHEL A.	T	Chimie minérale (Orsay).
OLMER	T	Energétique générale.
ROUAULT	T	Electricité (Orsay).
GAUTHIER	T	Mécanique appliquée.
BARCHEWITZ	T	Chimie physique.
BROSSEL	T	Physique atomique.
BUSER	T	Physiologie comparée.
CAMUS	T	Physio. végé.
CASTAING	T	Physique II thermo. (Orsay)
CURIEN	T	Minéralo. et cristal.
MOYSE	T	Physio. végé. (Orsay).
Mme CHARNIAUX-COTTON	T	Evolution des êtres organisés.
POSSOMPES	T	Zoologie.
PULLMANN	T	Chimie quantique.
TEILLAC	T	Physique nucl. et radioactivi. (Orsay).
TONNELAT	T	Bio. physico. chim. (Orsay)
VILLE	T	Econométrie.
WILLEMART	T	Chimie P. C. B.
DODE	T	Chimie (Orsay).
FREYMANN	T	Recherches physiques.
GUINOCHET	T	Biolo. végé. S. P. C. N. (Orsay).
ROLLET	T	Chimie minérale.
Mlle JOSIEN	T	Chimie S. P. C. N.
CHEVALLEY	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
ARNOULT	T	Electronique (Orsay).
CHAPELLE	T	Physique I (Orsay).
DELANGE	T	Mathématiques I (Orsay).
DENY	T	Mathé. géné. (Orsay).
GERMAIN	T	Mécanique théorique des fluides.
LUCAS	T	Géologie.
ALLARD	T	Chimie physique.
BERTHELOT	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).
BRICARD	T	Météor. et physique de l'atmosphère.
Mme ALBE-FESSARD	T	Psycho. physio.
FRIEDEL	T	Physique des solides (Orsay)

M. Julia	T	Etudes des moléculaires complexes.
Lender	T	Biologie animale S. P. C. N. (Orsay).
Magat	T	Physico. chimie des radio-éléments.
Mlle Quintin	T	Electrochimie
Monod	T	Chimie du métabolisme.
Benoit	T	Physio. animale (Orsay).
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Lemée	T	Ecologie végétale (Orsay).
Guérin	T	Chimie M. P. C. (Orsay).
Chatelet	T	Chimie P. C. B.
Jean	T	Physique nucléaire (Orsay).
Mattler	T	Physique S. P. C. N.
Bergerard	T	Zoologie (Orsay).
Bertein	T	Electronique (Orsay).
Bouissières	T	Radiochimie.
Mme Couture	T	Thermo. et méca. physique.
Ellemberger	T	Géologie des grandes régions du globe (Orsay).
Franc	T	Biologie animale P. C. B.
Schnell		Botanique tropicale.
Stlkowski	T	Physiologie végétale.
Acher	T	Chimie biologique.
Baudoin	T	Biologie animale P. C. B.
Beaumont		Biologie animale S. P. C .N.
Blamont		Géophysique ionosphère.
Boureau	T	Botanique.
Curie D.		Physique M. G. P.
Durand Delga	T	Géologie.
Fréon	T	Chimie organique (Orsay).
Heller	T	Physiologie végétale.
Tortrat	T	Calcul des probabilités.
Cailleux	T	Géologie S. P. C. N.
Magnan		Physique électricité.
Daudel	T	Mécanique ondulatoire appli. à la chimie théo. et à la phy. nucléaire.
Mlle Fourcroy		Biologie végétale S. P. C. N.
Mme Choquet-Bruhat		Mécanique analytique et méca. céleste.
Mlle Veil	T	Physiologie générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck	T	Méca. phys. et expérimentale.
Lacombe	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
Brochard	T	Physique P. C. B. (Orsay).
Cabannes	T	Mécanique générale.
Lesieur	T	Math. I (Orsay).
Mazet	T	Méca. géné. (Orsay).
Caire		Géogra. Physique et géo. dynami.
Comolet		Méca. des fluides.
Corabœuf	T	Physio. animale (Orsay).
Delloue	T	Physique de l'exosphère.
Gorenflot		Botanique II (Orsay).
Houillon		Biologie animale P. C. B.
Jullien J.		Chimie S. P. C. N. (Orsay).
Malgrange	T	Techniques mathé. de la phys. (Orsay).
Olivier		Anthropologie.
Nozeran	T	Botanique II (Orsay).
Blanc-Lapierre	T	Physique E. N. S. (Orsay).
Chevaugeon	T	Botanique (Orsay).
Kahane	T	Mathématiques (Orsay).
Samuel	T	Math. E. N. S. féminines.
Kourganoff	T	Astronomie (Orsay).
Thiry	T	Méca. céleste.
Abeles		Physique S. P. C. N.
Amat	T	Physique P. C. B.
Auboin	T	Géologie.
Mme Benoit-Gueutal	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
Bougis		Biologie marine Villefranche/mer.
Bruhat	T	Math. M. P. C.
Brunn	T	Géologie historique (Orsay).
Chabbal	T	Physique M. G. P. (Orsay).
Deheuvels	T	Math. propé.
D'Espagnat	T	Physique théorique (Orsay).
Furon	T	Géologie S. P. C. N.
Mme Gans	T	Génétique.
Geneves		Biologie végétale P. C. B.
Guilbert		Physique C. U. S. Orléans.
Hupe	T	Pétrographie.
Hollande	T	Biolo. géné.
Lions	T	Analyse numérique.
Maitte	T	Chimie P. C. B.
Meyer		Physique propé.
Nicolas		Géologie appliquée.
Panigel		Biologie générale.
Ravier		Pétrographie.
Roseau	T	Méca. théorique des fluides.
Roubine		Electronique.
Silber	T	Chimie P. C. B.
Uebersfeld	T	Electronique.
Yvon	T	Théories physiques.
Herve	T	Mathématiques.
Neron	T	Math. M. P. C. (Orsay).
Mme Pecker Wimel	T	Astrophysique.
Balkansky		Physique M. P. C.
Le Corre	T	Electricité.
Delcroix	T	Physique théorique (Orsay).
Gourdin	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Lehmann	T	Phys. exp. des hautes énergies.
Nataf	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
Echalier		Biologie animale P. C. B.
Barraud		Physiolo. cellulaire.
Lioret		Physiologie végé. (Orsay)
Dars		Géologie structurale et géolo. appliquée.
Camefort	T	Botanique (agrégation).
Vichniewsky	T	Mécanique industrielle.
Blaquière		Electronique (Orsay).
Arnous	T	Physique théorique.
Tatibouet		Chimie (C. S. U. Orléans).
Malliavin	T	Math. propé. (Orsay).
Gaudemar		Chimie propé.
Perez y Jorba		Physique Exp. des Hautes énergies (Orsay).
David	T	Chimie (agrégation Orsay).
Brousse	T	Mécanique théorique.
Rosch	T	Astronomie.
Guy	T	Physique expérimentale.
Lazard		Math. M. P. C.
Morel Pierre		Physique M. P. C.
Arsac		Programmation.
Lefebvre		Chimie M. P. C.
Chapeville		Biochimie.
Benoit		Physique C. P. E. M.
Rio		Chimie C. P. E. M.
Jauzein		Géologie E. N. S.
Prevost Geor.		BV C. P. E. M.
Favard P.		BA C. P. E. M.
Vilkas		Chimie C. P. E. M.
Mlle Ficini		Chimie C. P. E. M.
Lequeux		Astronomie.
Cohen Tannoudji		Physique M. P. C.
Tavernier		Physique C. P. E. M.
Mme Roizen		— —
Durand M.		BA S. P. C. N.
Pascaud		Physiologie.
Mme Petit		BA C. P. E. M.
Brousse		Géologie (Orsay).
Cagniac		Physique agrégation (Orsay).
Leberre		Zoologie (Orsay).
Scheffer		Microbiologie (Orsay).
De Gennes		Physique des solides (Orsay).
Riou		Physique nuclé. exp. (Orsay).
Clauser		Chimie biol. (Orsay).
Chevalier		Physio. animale (Orsay).
Jancovici		Physique atomique (Orsay).
Falk-Vairant		Physique nucléaire (Orsay).
Fetizon		Chimie propé. (Orsay).
Cerf		Mathématiques (Orsay).

Le Secrétaire Général ..... R. Poullain

Série A, N° 4560
N° D'ordre 5407

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

Moshé FLATO

1re THÈSE — « **Symétries de type lorentzien et interactions fortes** »

2e THÈSE — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Soutenues le 15 juin 1965 devant la Commission d'examen

M. A. LICHNEROWICZ — *Président*
Mme M. A. TONNELAT, M. J. P. MATHIEU — *Examinateurs*
M. G. RIDEAU, M. J. P. VIGIER — *Invités*

1967
Gauthier - Villars Editeur
PARIS

UNIV.
LEIDEN
BIB.

© GAUTHIER-VILLARS, 1967
Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction, par tous procédés y compris la photographie et le microfilm réservés pour tous pays.

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

NIVEAUX D'ÉNERGIE DES IONS DANS LES CRISTAUX TRIGONAUX ET TÉTRAGONAUX

« Journal of Molecular Spectroscopy », **17**, 300 - 324, (1965)

Vu et approuvé :

Paris, le 28 mai 1965

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE

AVANT-PROPOS

En premier lieu, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Lichnerowicz, qui a constamment montré un vif intérêt pour ce travail, et m'a fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Il m'est en outre particulièrement agréable d'adresser mes remerciements à Monsieur Louis de Broglie, pour la bienveillante attention qu'il n'a cessé de me porter. Je tiens également à remercier Monsieur Racah (Université Hébraïque de Jérusalem) pour son aide constante dans la préparation de la deuxième thèse et pour m'avoir montré toute l'importance de la théorie des groupes en physique.

Mes remerciements vont aussi à Madame Tonnelat et à Monsieur Mathieu, qui ont bien voulu se joindre au jury de ma thèse.

Messieurs Rideau et Vigier ont étroitement collaboré avec moi sur divers points de ce travail. Qu'ils trouvent ici le témoignage de ma reconnaissante amitié.

Je suis particulièrement heureux de témoigner ici de toute mon amitié à Monsieur Daniel Sternheimer, dont les encouragements et la collaboration m'ont été très précieux.

Je remercie enfin l'association pour l'organisation des stages (A. S. T. E. F.) du Ministère des Affaires Economiques pour la bourse dont j'ai bénéficié pendant une année et qui m'a permis d'effectuer ce travail.

PROLÉGOMÈNES

QUELQUES REMARQUES SUR LES THÉORIES EXISTANTES DES INTERACTIONS FORTES

Pendant des années, il a été découvert un grand nombre de « particules élémentaires ». Alors est apparue la nécessité de les classifier, et de savoir en quel sens elles sont « élémentaires ». C'est à ce moment qu'intervient la théorie. Mais celle-ci n'a pas pour seul but d'expliquer certaines données expérimentales observées par les expérimentateurs ; qui plus est, quand bien même la théorie en question prédirait des conséquences physiques (encore inobservées), on ne saurait être totalement satisfait. Nous ne pouvons prétendre à une satisfaction totale que si notre théorie remplit une condition supplémentaire, celle d'être basée sur un principe général profond qui n'est *a priori* pas relié aux données observées dont on cherche à expliquer la nature. On adopte alors cette théorie — et on base sur ses principes des considérations mathématiques et logiques. Ce n'est que lorsqu'apparaît une sérieuse divergence entre la théorie et l'expérience qu'il faut tenter de créer une nouvelle théorie — qui devra coïncider avec l'ancienne dans les limites où cette dernière était valable.

Nous en arrivons maintenant à quelques remarques concernant les théories existantes des particules élémentaires intervenant dans les interactions fortes. On peut remarquer que toutes ces théories sont semi-phénoménologiques, et ne satisfont pas complètement la condition de l'existence d'un principe général à la base. Pour notre part, nous avons essayé, en adoptant certains des plus puissants principes admis aujourd'hui (tels que, par exemple, la relation de Gell-Mann-Nishijima et ce qu'elle implique), de baser nos considérations sur des arguments mathématiques et physiques très généraux — mais nous nous sommes rapidement heurtés à de sérieuses difficultés, que nous expliquons dans le texte. Il pourrait y avoir deux façons de sortir de ce dilemme : ou bien continuer une analyse mathématique fine du problème dans tous ses détails, ou bien essayer de nouveaux concepts physiques — entièrement différents de ceux existant actuellement. Dans ce qui suit, nous essayons de résumer brièvement les idées essentielles des théories usuelles (principalement du point de vue des symétries), en les

comparant aux idées et à la terminologie dont nous faisons usage dans notre travail.

Nous traitons pour commencer le **problème des opérateurs** P, C, T — un des plus fascinants problèmes de la physique depuis la découverte de Yang, Lee, et Wu, que les interactions faibles ne conservent pas la parité externe. Comment traite-t-on habituellement ce problème ? Dans ce qu'il est convenu d'appeler le « formalisme externe » — à savoir le formalisme habituel de la théorie quantique des champs, où l'on ne s'occupe pas des propriétés dites internes des particules élémentaires — on fait l'hypothèse que les différents champs sont des représentations déterminées du groupe de Lorentz général, et que l'on a invariance sous ce groupe. La parité, par exemple, se définit alors comme suit : si $\psi(x)$ est un champ hermitien scalaire (on traite de façon analogue les autres types de champs), P est un opérateur unitaire en espace de Hilbert tel que $P\psi(x)\,P^{-1} = \psi(-r, t)$. On définit de façon similaire la conjugaison de charge C et la réflexion temporelle T dans le formalisme externe. Une fois ces opérations bien définies pour les divers champs, on peut prouver un théorème général, dû à Lüders : « Toute théorie, invariante sous le groupe de Lorentz, de particules en interactions, est invariante sous le produit de la symétrie d'espace, de la réflexion temporelle, et de la conjugaison (de charge) particule-antiparticule ».

Il y a toutefois dans la littérature scientifique un exemple d'une opération de parité définie dans le « formalisme interne », à savoir ce que l'on appelle la parité isotopique (ou G-parité) : si l'on cherche à relier l'indépendance de charge à l'invariance par rapport à la conjugaison de charge, on est naturellement amené à la définition de l'isoparité, un nombre quantique discret conservé par les interactions fortes.

Dans cet ouvrage, nous avons traité la question des opérations P, C, T d'un autre point de vue (plus abstrait). Nous définissons tout d'abord ces opérations discrètes dans la classe des automorphismes d'un groupe donné (en général interne). En étendant ces définitions aux représentations du groupe, et à l'algèbre de Lie correspondante, nous sommes en mesure de déduire des conséquences sur la « partie spatiale » généralisée de la parité [qui correspond dans le formalisme externe usuel à la transformation $(x_\mu) \rightsquigarrow (-r, t)$, sans transformation sur la forme du champ lui-même], simplement en construisant des fonctions à valeurs complexes définies sur le groupe et en faisant agir nos opérateurs sur ces dernières. La « partie intrinsèque » de nos parités ne peut se calculer que dans une représentation *déterminée* du groupe — qui opère alors sur des champs dont le mode de transformation est défini. Nous préférons cette définition car, étant abstraite, elle est intrinsèque (au moins pour ce qui est de la « partie spatiale ») et ne dépend pas de la représentation du champ. Elle a en outre l'avantage de décrire aussi bien les parités internes (celles qui nous intéressent ici) que les parités externes.

On peut remarquer que nous avons défini (en accord avec le théorème de Lüders) C dans le formalisme interne par la relation $PCT = 1$ (qui n'est d'ailleurs en général pas vérifiée dans le formalisme externe, une fois appliquée sur les champs). Ceci ne restreint cependant pas la généralité de notre traitement, car il est toujours possible — dans un modèle donné — de choisir une autre définition, sans modifier pour cela le traitement abstrait que nous avons développé. Il convient également de mentionner qu'il y a une légère différence entre notre façon de traiter les parités internes et le traitement habituel de la G-parité : nous supposons implicitement l'existence d'un groupe de symétrie interne (ou unifiée) qui, en quelque sorte, relie entre eux (au moins) les nombres quantiques internes — et définissons nos opérations abstraitement comme certains *automorphismes du groupe* donné. Au contraire, la théorie habituelle (dans le cas de l'isoparité) considérait SO(3) comme étant le groupe « fort » (pour les particules non étranges) et l'*étendait* par le groupe à deux éléments $\mathbf{Z}_2 = \{ 1, C \}$ de façon à l'agrandir, et à relier l'invariance par rapport à la conjugaison de charge à l'indépendance de charge.

Comment furent construites les symétries internes ? Il y eut pour commencer la notion de conservation de l'isospin : une fois la notion d'isospin $\boldsymbol{T}$ définie, on observa que tous les processus forts connus conservaient $\boldsymbol{T}$ [il convient de remarquer que cette conservation, qui n'est exacte que pour autant que seules sont en jeu les interactions fortes, n'est plus valable pour les interactions faibles et électromagnétiques]. Le groupe des rotations SO(3) fut ainsi tout naturellement le premier à être proposé comme groupe d'invariance forte. La découverte des particules étranges et de la conservation de l'hypercharge a amené à « compléter » ce groupe en U(2) (le groupe unitaire en deux dimensions). S'ajoutant à ces faits, la conservation du nombre baryonique a donné à penser que le « groupe fort » en question devait contenir un sous-groupe de la forme $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(2)$. Comme pour les physiciens il était quasi indispensable de n'utiliser que des groupes compacts (essentiellement pour des raisons de commodité mathématique), on s'intéressa surtout à deux exemples particulièrement simples de tels groupes comme candidats-groupe-fort, U(3) et $\mathrm{U}(1) \times \dfrac{\mathrm{SU}(3)}{\mathbf{Z}_3}$: le premier représentait le modèle de Sakata, et le second ce que l'on a appelé la « voie octuple » (eightfold-way) ; tous deux contiennent des sous-groupes $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(2)$ [le groupe $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(2)$ lui-même n'avait pas été pris en considération, car les dimensions de ses représentations irréductibles, et le mode de réduction du produit de Kronecker de deux de ses représentations irréductibles, ne permettaient pas de décrire convenablement la situation expérimentale].

Le modèle de Sakata était basé sur *trois états fondamentaux* : $\begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix}$; ils forment l'espace de la représentation de base de U(3) ; les autres états (considérés, sans raison physique profonde, comme n'étant pas fondamentaux)

formaient les espaces des représentations de dimension supérieure, c'est-à-dire qu'ils étaient construits comme des états composés de p, n, Λ et de leurs antiparticules.

Ce modèle qui accordait une préférence à p, n, Λ parmi toutes les particules, se trouva rapidement en contradiction totale avec l'expérience (par exemple dans le problème du spin de Ξ). Cette théorie, n'étant pas fondamentale, céda bientôt la place à une autre, basée sur le groupe « voisin » $U(1) \times \frac{SU(3)}{Z_3}$ (qui est localement isomorphe à U(3)), dont les prédictions furent en bien meilleur accord avec l'expérience. Et c'est ainsi qu'en 1961 la « voie octuple » fut introduite en physique des interactions fortes. La « partie essentielle » de ce modèle est $\frac{SU(3)}{Z_3}$, à savoir le groupe adjoint de su(3). Le facteur direct U(1) exprime la loi supplémentaire (non reliée à la « partie essentielle ») de conservation du nombre baryonique. Grâce à l'utilisation de $\frac{SU(3)}{Z_3}$, on élimine les représentations d'ordres 3 et 6 de su(3), obtenant pour premières représentations unitaires irréductibles celles de dimensions 8 et 10. Ces dernières permirent de classifier tous les baryons de spin-parité $\frac{1}{2}^+$, les mésons 0^- et ceux de spin-parité 1^-, chaque type de particules séparément bien entendu, dans l'espace de la représentation irréductible de dimension 8, les baryons de spin-parité $\frac{3}{2}^+$ étant classifiés dans l'espace de celle de dimension 10. Tout ceci (que nous expliquons plus en détail plus loin) avait l'avantage de mettre l'accent sur la symétrie entre l'octet des mésons pseudo-scalaires et celui des baryons $\frac{1}{2}^+$, et de plus de traiter sur un même pied tous les baryons de base. Mais le principal succès du modèle fut la prédiction, que l'expérience a vérifiée, de l'existence et des masses de nouvelles particules.

Comment les masses se rattachent-elles à notre problème des symétries ?

Si nous voulons exprimer la voie octuple « classique » comme un modèle de particules, il nous faudra « compléter » le groupe interne par un facteur direct, le recouvrement universel $\tilde{\mathbf{P}}$ du groupe de Lorentz inhomogène (groupe de Poincaré), lequel rend compte des « propriétés externes ». Le groupe total du modèle sera donc, en fin de compte, $\mathfrak{G} = \tilde{\mathbf{P}} \times U(1) \times \frac{SU(3)}{Z_3}$. Il en découle immédiatement que, dans les limites de la symétrie unitaire, toutes les particules classifiées dans une même représentation irréductible du groupe interne devront avoir la même masse. Mais ce résultat, que les physiciens appellent la dégénérescence de masse dans les supermultiplets, n'a évidemment rien à voir avec la réalité — où l'on observe des différences de masses supérieures à 100 MeV — ; d'où la nécessité de sauver la situation par un artifice théorique. C'est ainsi que fut introduite la notion de *cassage de*

symétrie — établissant une certaine analogie avec l'effet Zeeman spectroscopique. On remarque que la « voie octuple » peut être décrite à l'aide de trois « spins » différents, couplés entre eux : l'isospin T, un autre spin U et un troisième V — les résultats physiques dépendant essentiellement de T et de U. On classe alors les interactions comme suit : $U(1) \times \frac{SU(3)}{Z_3}$ est considéré comme étant le groupe d'invariance d'hypothétiques très fortes interactions, qui sont donc scalaires sous T et U ; puis viennent les interactions « moyennement fortes », qui sont les interactions fortes observées, et sont scalaires sous T, mais se transforment comme un scalaire plus (pour simplifier) un vecteur sous U [la situation inverse étant celle des interactions électromagnétiques].

Qu'est-ce que tout ceci a à voir avec les masses ? Nous allons le montrer sur un exemple, en obtenant la relation de masse de Gell-Mann pour l'octet de base des baryons $\frac{1}{2}^+$. On remarque que $\left(\Xi^0, \frac{\Sigma_0^0 + \sqrt{3}\,\Lambda}{2}, n\right)$ est un U-triplet, avec les valeurs de $U_z = -1, 0, 1$ respectivement. En notant M l'opérateur de cassage de masse (dû physiquement aux interactions moyennement fortes), S et V les contributions scalaire et vectorielle à sa valeur moyenne, on obtient aisément (l'isospin étant conservé, $< \Lambda \mid M \mid \Sigma^0 > = 0$) :

$$< \Xi^0 \mid M \mid \Xi^0 > = S - V, \quad < \frac{\Sigma^0 + \sqrt{3}\,\Lambda}{2} \mid M \mid \frac{\Sigma^0 + \sqrt{3}\,\Lambda}{2} > = S,$$

$$< n \mid M \mid n > = S + V,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{m_\Xi + m_N}{2} = \frac{m_\Sigma + 3\,m_\Lambda}{4}.$$

Par des considérations similaires, Okubo a montré que dans toute représentation irréductible du « modèle de la voie octuple », en dénotant par Y l'hypercharge et T l'isospin, on a la relation de masse suivante : $m = a + bY + c\left[T(T+1) - \frac{Y^2}{4}\right]$. [Elle fut assez bien vérifiée pour les baryons, mais dut être changée en $m^2 = \cdots$ pour les mésons — et même alors, l'accord avec l'expérience n'était pas satisfaisant].

Il convient cependant de faire dès maintenant quelques remarques sur les « symétries brisées ». Tout d'abord, l'analogie avec l'effet Zeeman n'est pas parfaite : dans l'effet Zeeman, la symétrie (sphérique) est *effectivement* brisée par la présence d'un champ magnétique ; dans notre cas, au contraire, les interactions très fortes, invariantes sous SU(3), étant purement hypothétiques, les considérations faites sont pure spéculation : on introduit une symétrie pour la briser plus tard, de façon à rendre compte de résultats

observés. De plus, le lien avec le groupe de Poincaré étant trivial (ce qui s'exprime par le produit direct), nos considérations sur la masse reposent entièrement sur le groupe interne — et théoriquement reviennent à utiliser le théorème de Wigner-Eckart : on émet en effet l'hypothèse (très forte) que l'opérateur d'éclatage de masse est du type de Wigner-Eckart. En outre, le choix de m (ou de m^2) dans la formule d'Okubo, au lieu d'une fonction quelconque $f(m)$, est également arbitraire dans le modèle.

Il se peut que les difficultés rencontrées dans le traitement de ces groupes internes aient une origine très simple : on attend trop d'eux ; ils ne sont pas du tout des groupes d'invariance d'*hamiltoniens*, mais l'analogue d'un groupe d'invariance d'un *état spectroscopique* donné (défini par exemple par son moment angulaire total L et son spin total S). Il est clair que dans un tel contexte l'analogie avec l'effet Zeeman (dans lequel la symétrie SO(3) — groupe d'invariance hamiltonienne — est brisée par le champ magnétique et réduite à la symétrie SO(2)) n'est pas du tout fondée. Quoi qu'il en soit, eu égard au succès partiel de la « voie octuple », la recherche de symétries encore plus élevées a poursuivi son cours.

Les symétries « supérieures ». Vers la fin de 1964, un groupe de physiciens s'intéressait au problème suivant : comment introduire le spin dans le schéma de classification de SU(3) ? Dans le modèle de la voie octuple, le spin et la parité, J^P, sont assignés de façon *artificielle* et supposés être les mêmes pour tous les états d'une même représentation irréductible de

$$\mathrm{U}(1) \times \frac{\mathrm{SU}(3)}{\mathbf{Z}_3}.$$

Est-il possible de construire un modèle qui fasse intervenir de façon explicite les opérateurs de spin, et qui relie au sein d'une même représentation des états auxquels sont assignés des valeurs différentes de J^P ? La solution non relativiste était très simple : si l'on suppose (pour simplifier) que notre groupe interne est SU(3), comme l'on sait que le groupe du spin non relativiste est SU(2) (dont les représentations irréductibles sont caractérisées par la valeur, entière ou demi-entière, du spin), on connaît au moins une technique simple pour les réunir au sein d'un même modèle : on prend une représentation de base de chacun des deux groupes, effectue leur produit de Kronecker, et « complète » le nouveau groupe obtenu SU(3) $\otimes$ SU(2) de façon à obtenir le groupe compact simple minimal dont la représentation de base a pour dimension celle du produit de Kronecker considéré ci-dessus. Dans notre cas (en notant $\otimes\otimes$ le produit de Kronecker ainsi « complété ») on aura SU(3) $\otimes\otimes$ SU(2) = SU(6) ; et c'est ainsi que le modèle de SU(6) non relativiste fit son apparition en physique des particules élémentaires. Il convient de mentionner que l'on n'a utilisé cette technique de « complétion » (qui peut être considérée comme étant l'instrument permettant d'obtenir une théorie des supermultiplets)

qu'en tant qu'astuce mathématique, dont la réussite peut s'expliquer par la simplicité de la réduction des représentations de SU(mn) sur le sous-groupe SU(m) $\otimes$ SU(n).

Une fois le groupe SU(6) obtenu, le schéma de la classification s'en déduit immédiatement. Les mésons 0^- et 1^- seront classifiés dans la représentation adjointe, de dimension 35 ; on aura ici l'octet des mésons 0^-, et trois fois le nonet de mésons vectoriels 1^- — ce qui correspond aux différentes valeurs de la projection du spin : $J_3 = 1, 0$, et -1. Les baryons ($\frac{1}{2}^+$ et $\frac{3}{2}^+$) seront classifiés dans la représentation de dimension 56 ; on aura deux fois l'octet ($J_3 = \pm \frac{1}{2}$) et quatre fois le décuplet ($J_3 = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$). On voit ainsi comment ce modèle enveloppe le spin, relie entre eux divers supermultiplets de SU(3), et contient toutes les projections possibles d'un spin donné comme des états différents dans l'espace d'une même représentation irréductible. Une des conséquences que l'on peut déduire de ce *type* de modèles est le rapport des moments magnétiques du proton et du neutron, que l'on trouve être $\frac{\mu_p}{\mu_n} = -\frac{3}{2}$ (ce qui est en accord avec les résultats expérimentaux).

Le succès partiel du modèle de SU(6) a incité divers physiciens à en formuler des généralisations relativistes, parmi lesquelles on peut citer le groupe SL(6, **C**) inhomogène, le modèle de SU(6, 6) [que l'on peut obtenir, par la même technique que plus haut, en « complétant » le produit de Kronecker SU(3) $\otimes$ SU(2, 2) — où SU(2, 2) est le groupe simple d'ordre minimum contenant le recouvrement universel $\tilde{\mathbf{P}}$ du groupe de Poincaré], etc. Tous ces modèles sont basés sur le fait que le spin relativiste ne peut être vraiment décrit qu'à l'aide du groupe de Poincaré. Malheureusement toutes ces généralisations relativistes de SU(6) (dans les détails desquelles nous n'entrerons pas ici) se heurtent à de nombreux obstacles sérieux, tant mathématiques que physiques ; qui plus est, leurs prédictions ne sont que très partiellement en accord avec les résultats expérimentaux.

Les raisons de toutes ces difficultés dans la formulation de la nouvelle théorie cherchée sont assez simples : outre les raisons que nous avons déjà énoncées, on remarquera que l'introduction du groupe, les principes physiques, et la technique mathématique, sont purement *ad hoc* et spéculatifs ; on ne saurait donc, dans l'état actuel, espérer obtenir ainsi une théorie de base. Par ailleurs, il se pourrait que notre croyance en l'existence d'un groupe interne s'avère être un vœu pieux !

La discussion que nous venons de faire ne serait pas complète si nous ne mentionnions pas la tentative toute récente d'aborder le problème à l'aide de ce que l'on appelle « l'algèbre des composantes de courant ». Le groupe SU(6) $\times$ SU(6) est considéré comme étant engendré par des intégrales sur l'espace de composantes, de parité positive, de courants vectoriels, vectoriels-axiaux, scalaires et tensoriels. On suppose que les états-de-repos-d'une-particule forment une représentation de ce groupe. On définit alors un « groupe colinéaire hybride » comme un sous-groupe du premier, dépen-

dant de la direction du mouvement, dont les éléments de matrice ont les mêmes valeurs pour les états en mouvement (dans la direction donnée) que pour les états au repos [tout ceci est possible *a priori* puisqu'on suppose que tous les membres d'une même représentation ont la même masse]. On propose alors que le groupe de symétrie de l'hamiltonien soit l'intersection de tous les « groupes colinéaires » dans toutes les directions. Et d'ailleurs on a pu, dans le cas du groupe initial SU(6) × SU(6), obtenir SU(3) pour intersection de tous les « groupes colinéaires ». Malheureusement, comme cela a déjà été remarqué, ce schéma (qui repose sur l'hypothèse que tous les « groupes colinéaires hybrides » transforment des états d'une particule, dans la direction donnée de mouvement, en des états d'*une* particule) contient une contradiction interne. Et de plus, toutes les objections de principe que nous avons formulées envers tous les modèles *ad hoc* sont encore applicables à celui-ci (et à ses versions récentes plus populaires).

En guise de conclusion, nous allons discuter de certains *problèmes généraux*, communs à tous les modèles. Le premier problème à traiter sera celui de l'utilisation de divers types de représentations du groupe de notre modèle fort (ou, ce qui ne revient pas toujours au même, de l'algèbre de Lie correspondante). Dans le cas des modèles non relativistes, la plupart des physiciens utilisent des groupes compacts (en général de type SU(n)). Dans ce cas, il n'y a pas de problème : toutes les représentations irréductibles de dimension finie sont équivalentes à des représentations unitaires, et les représentations unitaires de dimension infinie sont réductibles. On cherchera ainsi à classifier les particules, à obtenir des relations de masse, etc. dans des cas où l'espace de la représentation est de dimension finie. Au contraire, pour les modèles relativistes, ou même, comme certains physiciens le font, pour le traitement du groupe interne, on fait appel à des groupes non compacts (mais localement compacts) — tels que SL(4, **R**), SU(2, 2), etc. —. Dans ce cas, aucune des représentations irréductibles (fidèles) du groupe n'est équivalente à une représentation unitaire. Les seules représentations unitaires irréductibles (non triviales) sont de dimension infinie. Or les physiciens admettent d'habitude que les seules représentations physiques sont les représentations unitaires, si l'on veut avoir conservation de la probabilité dans son modèle. Un physicien qui se sert de groupes non compacts pour classifier les états aura ainsi dans ses représentations irréductibles unitaires un nombre infini d'états — ce qui d'ailleurs n'est pas si absurde, eu égard au nombre grandissant de particules qui sont découvertes.

Une autre possibilité pour les physiciens qui traitent des groupes non compacts sera la suivante. Si l'on veut classifier les particules dans les représentations de dimension finie (ce qui est malgré tout fortement suggéré par les résultats expérimentaux) il nous faut abandonner l'*hypothèse de l'unitarité*. On pourra alors calculer les relations de masse dans des représentations unitaires de dimension infinie — et on les étendra artificiellement aux repré-

sentations de dimension finie au moyen d'un principe de correspondance entre des représentations infinies et finies, qui sera basé sur des relations mathématiques entre les deux [physiquement, cela pourrait s'interpréter comme le passage de la mécanique quantique à une nouvelle mécanique subquantique]. Cet abandon de l'unitarité, qui paraît très grave à première vue, pourrait s'avérer être un succès. L'interprétation probabiliste, qui est bien établie en mécanique quantique, pourrait (comme Dirac l'a remarqué) être remplacée en électrodynamique quantique par une certaine interprétation d'intensité. Ceci expliquerait alors l'abandon éventuel de l'unitarité en théorie des interactions fortes.

Pour terminer, on peut dire sans risque d'erreur qu'il y a encore beaucoup de difficultés mathématiques et physiques de base à surmonter. Outre celles que nous venons de mentionner, il y a le problème de la « *formule de masse exacte* » — à savoir l'étude du spectre de $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ dans une représentation irréductible donnée. On a pu un moment penser que ce spectre se réduisait à un point, ou bien ne contenait aucune valeur propre, pour toute algèbre de Lie d'ordre fini contenant celle du groupe de Poincaré ($g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ étant représenté par un opérateur self-adjoint en espace de Hilbert). Cependant, la démonstration de ce fait s'est avérée erronée, et l'on peut conserver l'espoir de trouver mathématiquement un spectre de masse pour les particules élémentaires dans notre modèle. Une technique possible pour résoudre ces problème pourrait consister à développer de façon rigoureuse la technique de « contraction de groupes » introduite par Segal, Wigner et Inönü.

Plus généralement, on pourrait formuler comme suit un « programme » pour l'étude du spectre de masse, et ses motivations : (*)

a) On sait, d'après R. Jost (à paraître) que pour toute représentation continue, unitaire, irréductible, d'un groupe de Lie d'ordre fini contenant le groupe de Poincaré, le spectre de l'opérateur M représentant $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ est un ensemble connexe. Ceci exclut dans ce cas la possibilité d'avoir plusieurs valeurs propres isolées (mais non pas plusieurs valeurs propres « à fond continu »).

b) On sait aussi [voir par exemple l'exemple (physique) que nous avons donné, avec D. Sternheimer (Phys. Rev. Letters **16**, 1185 (1966)) pour le cas de su(2,2) — basé sur la représentation infinitésimale donnée en appendice (B) au chapitre I] que, dans le cas de représentations « locales » (d'algèbres de Lie), on peut avoir un spectre de M purement ponctuel dans une représentation irréductible d'une algèbre de Lie $\mathfrak{U}$ contenant celle, $\mathfrak{I}$, de **P** (et une algèbre $\mathfrak{K}$, associée aux nombres quantiques internes).

c) Si l'on veut rester dans un cadre relativement « traditionnel », nous considérerons que le principe de classification (cf. chapitre III) relie (ce qui

* paragraphe ajouté lors de la correction des épreuves.

pourrait se réaliser par exemple par une technique du type « représentations induites ») certaines représentations de dimension finie du groupe interne **X** (ou, ce qui revient ici au même, de son algèbre de Lie $\mathfrak{X}$), représentations « de classification » (irréductibles) agissant sur les *champs* associés aux particules (donc non nécessairement unitaires) à certaines représentations (« spectrales ») de dimension infinie, unitaires du groupe unifiant **U** ou bien antisymétriques (à prolongements antiadjoints) de son algèbre de Lie $\mathfrak{U}$, agissant sur des *états* ; dans ces dernières (qui d'ailleurs ne sont *a priori* pas nécessairement irréductibles) le spectre de M (auto-adjoint) donnera, comme nous allons l'expliquer, le spectre de masse.

d) Cette interprétation du spectre de M, opérateur auto-adjoint représentant $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$, de décomposition spectrale $M = \int \lambda \mathrm{d}E(\lambda)$, pourra se faire comme suit : si m est une valeur propre (à fond continu ou non) de M, et ψ un vecteur propre unité correspondant, on a $(M\psi, \psi) = m = \int \lambda(\mathrm{d}E(\lambda)\psi, \psi)$; la mesure scalaire $(\mathrm{d}E(\lambda)\psi, \psi) = \mathrm{d}\mu_\psi$ est ainsi la mesure de Dirac δ_m en m ; si φ est « voisin » (dans un sens à préciser) de ψ, il se peut très bien que l'on ait $\mathrm{d}\mu_\varphi = f(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda$, où f est une fonction « en cloche » approchant δ_m au sens des distributions ; on pourrait ainsi interpréter la « largeur » de la particule de masse $\sqrt{m}$. Si l'on a un spectre purement continu, on pourra encore considérer les $(M\psi, \psi)$ pour des ψ convenables, et traiter de même les $\mathrm{d}\mu_\psi$ correspondantes.

Les difficultés physiques sont néanmoins très profondes, et il se pourrait bien que certains des « principes généraux » qui étaient valables jusqu'ici en physique doivent être remplacés. Il semble que cela seul puisse expliquer pourquoi, tout en faisant des progrès énormes, la théorie n'a pas encore pu expliquer clairement ce qu'est une particule élémentaire.

INTRODUCTION

POSITION DU PROBLÈME

Au commencement, l'homme découvrit l'atome, puis ses constituants : proton, neutron, électron. A ce stade là, la théorie pouvait sembler (relativement) aisée. Puis vint le chaos, la découverte, sur terre et dans les cieux, de nouvelles particules : neutrinos, mésons, antiparticules, particules « étranges » ... On a commencé par tenter de généraliser ce que l'on avait fait dans le cas des nucléons. Suivant notamment Heisenberg, on considérait p et n (le proton et le neutron) comme deux états d'une même particule ; ceci a conduit à l'introduction (phénoménologique) d'un nombre quantique supplémentaire, l'isospin, que l'on a associé à un groupe de « spin isotopique » SU(2) ; ce dernier, le groupe spécial unitaire en deux dimensions (complexes), recouvrement universel du groupe (spécial) des rotations en trois dimensions (réelles) SO(3) (on le considère pour pouvoir avoir des valeurs demi-entières pour l'isospin), peut être interprété à l'aide de rotations dans un certain espace abstrait (distinct de l'espace physique usuel), l' « isoespace ». La découverte de l'hypéron Λ et, avec lui, d'autres particules dites « étranges », a imposé l'introduction d'un nouveau nombre quantique, l'étrangeté, définie (phénoménologiquement) à l'aide de la formule de Gell-Mann-Nishijima, $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ (où Q est la charge, I_3 la 3e composante de l'isospin, et $Y = B + S$, S étant l'étrangeté, et B le nombre baryonique — soit + 1 pour les baryons, — 1 pour les antibaryons, et 0 pour les autres particules) — ; ceci a permis un premier essai de classification des particules dites élémentaires au moyen de l'isospin et de l'étrangeté. Prentki et d'Espagnat ont alors développé un modèle géométrique, en considérant rotations et réflexions dans l'isoespace, qui a permis de retrouver, moyennant certaines hypothèses, la formule de Gell-Mann-Nishijima. Ce dernier essai devait s'avérer insuffisant et, comme l'on connaissait (au moins) deux nombres quantiques, on en est venu à la nécessité d'utiliser, dans une théorie des interactions fortes, un groupe de symétrie de rang au moins égal à 2. Un premier essai avec de tels groupes avait été tenté par Salam et Polkinghorne, qui avaient proposé un modèle d' « isoespace quadridimensionnel » basé sur le groupe (compact, de rang 2) SO(4), d'algèbre de Lie $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$. Sakata avait proposé un modèle basé sur

3 champs fondamentaux, modèle que Ikeda, Ogawa, Ohnuki ont essayé d'expliquer à l'aide du groupe (compact, de rang 2) SU(3), explication qui a été reprise, dans la version « eightfold way », par Neeman et Gell-Mann. D'autres auteurs, soupçonnant l'importance du groupe de Lorentz (introduit par la relativité restreinte) en théorie des interactions fortes, ont proposé le modèle dit du « rotateur relativiste » (de J. P. Vigier et de ses collaborateurs), basé sur le groupe de Lorentz **L** et son « bilatère » $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$.

Toutes ces généralisations du modèle classique d'isoespace, intéressantes pour la plupart, restaient cependant semi-phénoménologiques : en effet, sans raison physique, on posait *a priori* le groupe de symétrie, essayant de « justifier » ce choix par les conséquences expérimentales (explication des résultats connus et prédiction de nouveaux) que l'on en tirait. Qui plus est, pour avoir une formule de « masse », on devait (outre postuler ce qui représente la masse dans la symétrie dite « interne ») briser la symétrie (cf. Okubo) ; cette dernière démarche est d'ailleurs tout à fait parallèle à l'utilisation de la formule de Wigner-Eckart ; sa base physique, reposant sur la distinction entre les interactions « très fortes », lesquelles auraient la symétrie forte, qui sert à la classification, mais qu'on n'a pas encore pu observer, et les interactions « moyennement fortes », dont la symétrie est la symétrie « brisée », et qui sont les interactions fortes observées, n'est pas très convaincante.

Dans notre étude, nous partons du principe (désormais classique) que les interactions fortes des particules élémentaires obéissent à une certaine symétrie ; mais, comme nous ne connaissons presque rien sur les forces mises en jeu, le groupe en question, dit groupe de symétrie interne, ne nous est pas fourni par la physique. Notre but sera donc de faire intervenir certains critères pour essayer de déterminer le groupe (ce qui d'ailleurs en retour, une fois correctement fait, fournira certains renseignements sur la dynamique du problème). Les critères considérés seront de deux types : d'une part des critères géométriques, basés sur un certain caractère d'espace-temps du modèle considéré, d'autre part des critères algébriques, fournis par l'étude des liens pouvant exister entre les formalismes externe (groupe de Poincaré, et son algèbre de Lie) et interne.

Les critères géométriques feront l'objet du premier chapitre. A cause du fait que les opérations P, C, T sont conservées dans les interactions fortes, nous essayerons de les définir dans la symétrie interne, et pour cela considérerons des groupes internes de type lorentzien (contenant **L**), et chercherons à y définir ces opérations de façon à ce que sur le sous-groupe **L**, elles redonnent les opérations que l'on obtient à partir de leur interprétation géométrique — ce qui imposera au préalable de les définir pour **L**. D'autre part, la symétrie (phénoménologique) entre les 4 leptons et 4 baryons considérés comme étant « de base » (pour ce qui est, par exemple, des interactions « courant-courant » dans l'hamiltonien) suggère l'utilisation

possible d'un groupe quadridimensionnel (c'est-à-dire pouvant être considéré comme groupe de transformations dans un espace à 4 dimensions) comme symétrie interne. Ceci, et le fait que SL(4, **C**) (groupe linéaire spécial en 4 dimensions — complexes —) a une certaine signification dans l'espace de Minkowski, invite à chercher la symétrie forte parmi les sous-groupes de SL(4, **C**), et plus particulièrement parmi ceux contenant **L**. Nous porterons notre attention plus particulièrement sur SL(3, **C**), qui permettra entre autres d'utiliser, pour l'essentiel, la classification de SU(3), et aussi sur le groupe conforme (localement isomorphe à SU(2, 2), groupe linéaire spécial de la forme hermitienne $z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - z_3 \bar{z}_3 - z_4 \bar{z}_4$), qui a une interprétation particulièrement intéressante comme transformations dans l'espace de Minkowski. Par ailleurs, nous savons que des quantités comme la masse et le spin sont liées au groupe de Poincaré (groupe « externe ») et, comme elles interviennent pour caractériser les particules, il est logique de supposer qu'elles sont, dans une certaine façon, reliées au groupe interne.

Dans un deuxième chapitre, nous nous poserons donc la question de savoir quel lien peut exister entre les formalismes externe et interne. L'invariant $-g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré (c'est le carré de la masse physique) ne devra pas, dans un tel lien, commuter avec tous les opérateurs de l'algèbre interne, car sinon, par exemple, les particules que l'on classifie dans une même représentation du groupe interne n'auraient aucune raison d'avoir des masses différentes. Nous chercherons donc un lien, qui ne soit pas produit direct, et qui permette d'obtenir un « spectre » de masse (dans une même représentation du groupe de classification), entre l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré et celle du groupe interne. Ceci imposera des limitations assez strictes sur ce dernier (supposé semi-simple).

Enfin, ainsi outillés, nous serons à même d'aborder les applications physiques de ce que nous venons de faire. Outre une interprétation intéressante du nombre quantique de Bronzan et Low à l'aide de notre étude des opérateurs P, C, T internes, nous chercherons à appliquer l'étude du deuxième chapitre en vue de trouver, sans briser la symétrie, une formule de masse forte et électromagnétique des particules élémentaires, c'est-à-dire que nous chercherons à exprimer $-g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ (qui représente le carré de la masse physique) en fonction d'invariants et de nombres quantiques internes (I, I_3, Y), en cherchant un invariant qui contienne $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ et d'autres termes (qui fourniront le « spectre » de masse). Une fois une telle formule obtenue, il restera encore à lui donner un sens dans les diverses représentations de l'algèbre de Lie, et à la relier à la classification des particules ; c'est par ce dernier point que nous terminerons notre étude, introduisant un « principe de classification », qui peut-être indique une certaine correspondance entre un milieu subquantique et notre milieu quantique.

CHAPITRE PREMIER

GROUPES LORENTZIENS ET GÉOMÉTRIE D'ESPACE-TEMPS

Une part importante de ce chapitre sera consacrée à la définition des opérations P, C, T dans le formalisme « interne ». L'opération P, parité, est définie dans le formalisme « externe » comme symétrie spatiale par rapport à l'origine des coordonnées, soit le changement de $\boldsymbol{x}$ en $-\boldsymbol{x}$, où $(\boldsymbol{x}, t)$ représente un point dans l'espace de Minkowski. L'opération C (ou parfois le produit PC) est prise habituellement comme l'échange particule-antiparticule, c'est-à-dire comme changement de signe de tous les nombres quantiques. L'opération T est la symétrie « temporelle », soit l'échange de t en $-t$; remarquons à ce propos que si, au lieu de considérer l'espace de Minkowski « réel », avec la métrique hyperbolique $\boldsymbol{x}^2 - t^2$ (on fait $c = 1$) on considère l'espace « réel et imaginaire », composé des points $(\boldsymbol{x}, it)$, la métrique étant ici $\boldsymbol{x}^2 + (it)^2$, l'opération T est l'échange de (it) en $-it = \overline{(it)}$, soit une conjugaison (opération antilinéaire).

Or nous savons d'une part que les opérations P, C, T sont conservées dans les interactions fortes, et d'autre part, d'après le théorème de Lüders (cf. par exemple ([1]) pour sa formulation) que si une théorie de champs d'interactions est invariante sous le groupe de Lorentz propre, elle laisse invariant le produit PCT.

Nous chercherons donc à définir P et T de façon convenable dans le formalisme interne, soit dans les groupes lorentziens (contenant le groupe de Lorentz propre $\mathbf{L}$), les anneaux de groupe correspondants, les algèbres de Lie de ces groupes, ainsi que dans les représentations. Dans chaque cas, le théorème de Lüders nous permettra alors de définir C, qui n'a pas de signification géométrique immédiate, par la relation $PCT = 1$ (qui correspond à un choix de phase).

1. Commençons par définir *P dans le groupe de Lorentz* (homogène) propre, dans les deux réalisations quadridimensionnelles de celui-ci, correspondant aux deux réalisations de l'espace de Minkowski. Dans l'espace de Minkowski, la symétrie spatiale est réalisée au moyen de la matrice

$$s = -I_{31} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & +1 \end{pmatrix}.$$

Si l'on effectue cette transformation sur l'espace, soit

$$(x'_\mu) = s(x_\mu) \quad (\mu = 1, \ldots, 4),$$

les transformations du groupe de Lorentz, qui s'écrivaient

$$x = gx_0$$

($x = (x_\mu)$) dans l'espace de Minkowski, dans sa réalisation réelle ou « complexe », deviendront $x' = sx = gx'_0 = gsx_0$. Multipliant à gauche par s^{-1}, et tenant compte de ce que $s^2 = 1$, on aura $x = (sgs)\, x_0$. Ainsi, l'opération P dans l'espace de Minkowski induit sur le groupe de Lorentz la transformation $g \rightsquigarrow sgs = s^{-1} gs$. Si l'on exprime alors ceci dans la réalisation « réelle » du groupe de Lorentz en 4 dimensions, on voit que

$$sgs = \tilde{g}^{-1} = g^{*-1}$$

(où $g^* = \bar{\tilde{g}}$, le conjugué hermitien) ; dans la réalisation « réelle et imaginaire », on a immédiatement $sgs = \bar{g} = g^{*-1}$ (c'est une réalisation comme sous-groupe de O(4, **C**)). D'où :

Définition : La parité P est, dans le groupe de Lorentz, l'*automorphisme involutif* P : $g \rightsquigarrow g^{*-1}$ (dans toute réalisation du groupe).

Rappelons qu'un automorphisme involutif est un automorphisme distinct de l'identité et dont le carré est l'identité (pour préciser de quel automorphisme on parlait, il a été nécessaire de supposer le groupe réalisé — ou représenté — linéairement, afin de donner un sens au conjugué hermitien). Nous n'avons pas, ici, précisé de quel groupe de Lorentz (propre, complet, ou général) nous parlions : en effet, cette définition a un sens dans le groupe de Lorentz général O(3, 1). Cependant, il y a une différence essentielle entre le groupe de Lorentz propre (connexe) et les autres, de ce point de vue. En effet, pour **L**, l'automorphisme P est *externe*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'élément $h \in \mathbf{L}$ tel que $Pg = h^{-1} gh$, alors que pour $\mathbf{L}_c$ (et O(3, 1) par conséquent) on a $Pg = s^{-1} gs$, avec $s \in \mathbf{L}_c$. Nous reviendrons plus loin sur les liens entre P, $\mathbf{L}_c$, $\mathbf{L}_g$ = O(3, 1), et SO(3, 1), après avoir précisé les rapports entre ces groupes.

2. La définition de P dans L (au moyen de ses réalisations quadridimensionnelles) nous permet de le définir dans l'*algèbre de Lie* £. Il est en effet évident que, quelles que soient les matrices carrées l, s (s régulière) on a $\exp(s^{-1} ls) = s^{-1}(\exp l)\, s$. En prenant alors s comme avant, $l \in D_N(\mathfrak{L})$, on aura $sD_N(a_k)\, s = D_N(a_k)$ et $sD_N(b_k)\, s = -D_N(b_k)$. Avec la représentation « complexe » de £, obtenue à l'aide de la réalisation « complexe » de **L**, on obtiendrait le même résultat, car ici b_1 par exemple est représenté par $D(b_1) = \mathrm{i}(E_{14} - E_{41})$ (dans la base canonique de $\mathfrak{sl}(4)$), et on aura

$$sD(b_1)\, s = -D(b_1) = \overline{D(b_1)}$$

dans ce cas précis. Si on utilise la représentation infinitésimale de £ en coordonnées et dérivations de l'espace de Minkowski réel, comme P : $x_\mu \rightsquigarrow - g_{\mu\nu} x^\nu$ et donc

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightsquigarrow - g_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu},$$

on aura (cf. appendice pour l'expression des $M_{\mu\nu}$)

$$PM_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}\, g_{\nu\sigma}\, M_{\rho\sigma}, \qquad \text{soit} \qquad PM_{jk} = M_{jk} \qquad \text{et} \qquad PM_{k4} = - M_{k4}.$$

En prenant pour base de £ les (a_k, b_k) $(k = 1, 2, 3)$, on voit que tout $l \in £$ peut s'exprimer sous la forme $l = a + b$, où a est combinaison linéaire (réelle) des a_k, et b des b_k, et qu'alors l'action de P sur l s'écrit

$$a + b = l \rightsquigarrow Pl = P(a + b) = Pa + Pb = a - b,$$

soit :

$$P : a + b \rightsquigarrow a - b.$$

Rappelons maintenant quelques définitions sur les algèbres de Lie, qui nous seront utiles par la suite (cf. ([19]) par exemple).

Définitions. Soit $\mathfrak{s}_{\mathbf{R}}$ une algèbre de Lie sur le corps des réels **R**. On dit qu'elle possède une *structure complexe* J si J est un endomorphisme de l'espace vectoriel réel sous-jacent tel que $J^2 = - I$ et que

$$[X, JY] = J[X, Y]$$

pour tout X, $Y \in \mathfrak{s}_{\mathbf{R}}$. Si $\mathfrak{s}$ est une algèbre de Lie sur **C**, sa restriction réelle $\mathfrak{s}_{\mathbf{R}}$ (qui a le double de générateurs) possède une structure complexe J. On dit l'algèbre de Lie $\mathfrak{s}_\circ$ *forme réelle* de l'algèbre complexe $\mathfrak{s}$ si

$$\mathfrak{s}_{\mathbf{R}} = \mathfrak{s}_\circ + J\mathfrak{s}_\circ$$

(somme directe d'espaces vectoriels). L'application σ de $\mathfrak{s}$ sur lui-même définie par $\sigma : X + iY \rightsquigarrow X - iY (X, Y \in \mathfrak{s}_\circ)$ est dite *conjugaison* de $\mathfrak{s}$ par rapport à $\mathfrak{s}_\circ$ (c'est un automorphisme de $\mathfrak{s}_{\mathbf{R}}$, mais non de $\mathfrak{s}$). On dit une algèbre de Lie réelle $\mathfrak{u}$ *compacte* si le sous-groupe Int $(\mathfrak{u})$ du groupe des automorphismes de $\mathfrak{u}$, Aut $(\mathfrak{u})$, sous-groupe d'algèbre de Lie ad $\mathfrak{u}$ (ad désignant l'application adjointe), est compact. Une décomposition

$$\mathfrak{s}_\circ = \mathfrak{k}_\circ + \mathfrak{p}_\circ$$

(somme directe d'espaces vectoriels) d'une algèbre de Lie réelle *semi-simple* $\mathfrak{s}_\circ$ est dite *décomposition de Cartan* si $\mathfrak{k}_\circ$ est une sous-algèbre, $\mathfrak{p}_\circ$ un sous-espace vectoriel, et s'il existe une forme réelle compacte $\mathfrak{u}$ de l'algèbre complexe $\mathfrak{s}$ (obtenue par extension à **C** du corps des scalaires à partir de $\mathfrak{s}_\circ$) telle que, σ désignant la conjugaison de $\mathfrak{s}$ par rapport à $\mathfrak{s}_\circ$,

$$\sigma\mathfrak{u} \subset \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{k}_\circ = \mathfrak{s}_\circ \cap \mathfrak{u}, \quad \mathfrak{p}_\circ = \mathfrak{s}_\circ \cap (i\mathfrak{u}).$$

De telles décompositions existent toujours ; elles sont toutes conjuguées les unes des autres par des automorphismes internes (de Int $(\mathfrak{s}_0)$) ; $\mathfrak{k}_0$ est une sous-algèbre compacte maximale. L'application $\varphi : k + p \rightsquigarrow k - p$ $(k \in \mathfrak{k}_0, p \in \mathfrak{p}_0)$ est alors un *automorphisme involutif* de $\mathfrak{s}_0$.

Appliquons ceci à l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) = \mathfrak{su}(2) + J\mathfrak{su}(2)$ qui est isomorphe à £ ; sous la forme écrite, cette décomposition est une décomposition de Cartan. Les relations de commutation de £ nous montrent que la décomposition $l = a + b$ des éléments $l \in$ £ est celle correspondant à une décomposition de Cartan de ce type. Notons (a_k) l'algèbre $\mathfrak{su}(2)$ engendrée par les a_k, (b_k) l'espace $J\mathfrak{su}(2)$ engendré par les b_k. L'automorphisme involutif $\varphi : a + b \rightsquigarrow a - b$ est aussi, dans notre cas, l'automorphisme de £ $= \mathfrak{su}(2) \otimes \mathbf{C} = (\mathfrak{su}(2)_{(\mathbf{C})|\mathbf{R}})$ (extension à $\mathbf{C}$ du corps des scalaires, puis restriction à $\mathbf{R}$) défini par la conjugaison de $\mathfrak{su}(2)_{(\mathbf{C})}$ par rapport à la forme réelle compacte $\mathfrak{su}(2)$. Mais son action est, dans notre cas, exactement celle de P. D'où la définition abstraite :

Définition. Dans l'algèbre de Lie £, la *parité* P est *l'automorphisme involutif correspondant à la décomposition de Cartan* £ $= (a_k) + (b_k)$.

Comme l'algèbre (a_k) ne contient pas une sous-algèbre de Cartan de £ (sous-algèbre commutative maximale, à éléments semi-simples), le théorème (IX, 3.6) de ([19]) (par exemple) nous montre que l'automorphisme P est *externe*, c'est-à-dire n'appartient pas à Int (£) ; ceci correspond au fait que la parité est un automorphisme externe du groupe de Lorentz connexe $\mathbf{L}$.

[Nous avons ici désigné par la même lettre P un automorphisme du groupe, et celui induit sur l'algèbre, qu'en toute rigueur (cf. ([13])) il faudrait noter dP (la différentielle de l'automorphisme P du groupe), cet abus d'écriture ne prêtant pas à confusion.]

On peut prendre pour générateurs de l'algèbre de Lie complexe

$$£_{(\mathbf{C})} \approx (\mathfrak{so}(3)^+ \oplus \mathfrak{so}(3)^-)_{(\mathbf{C})}$$

les combinaisons $J_k^{\pm} = a_k \pm ib_k$. En prolongeant P par linéarité à l'algèbre complexe $£_{(\mathbf{C})}$, on voit que $PJ_k^{\pm} = J_k^{\mp}$, c'est-à-dire que P est une conjugaison (formelle) sur les générateurs $J_k^{\pm}$.

3. Avant de définir la *parité* P dans les représentations de $\mathbf{L}$, nous allons le faire dans les *représentations* de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, ou, plus exactement, dans les espaces des représentations spinorielles de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, en nous limitant à la partie centrale $D_{mn} \otimes D_{mn}$, où la définition est particulièrement intéressante. On a en effet obtenu l'action de P sur le groupe $\mathbf{L}$ à partir de celle de la parité, multiplication des vecteurs par la matrice s, dans l'espace de Minkowski. Or nous savons que les fonctions de base des représentations $D_{mn} \otimes D_{mn}$ de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ peuvent être prises comme étant

$$Y_{mn}^{pqp'q'}(h) = Y_{mn}^{pqp'q'}(\omega^+, \omega^-) ,$$

où h est un certain élément du groupe $\mathbf{L}$, de paramètres (ω^+, ω^-), en utilisant les angles d'Euler complexes. Il nous faut définir l'opération qui, dans l'espace de ces fonctions, correspond à la multiplication par le couple (s, s) dans le produit direct de deux espaces de Minkowski : $(x, x') \rightsquigarrow (sx, sx')$, laquelle, de même que pour $\mathbf{L}$, induit sur le groupe $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ l'opération parité :

$$(g, g') \rightsquigarrow (s^{-1}, s^{-1})\,(g, g')\,(s, s) = (g^{*-1}, g'^{*-1})$$

que nous noterons encore par P, pour ne pas compliquer les notations (au lieu de $P \times P$). Or l'action de l'opérateur (s, s) sur l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{L})$ des fonctions continues sur le groupe $\mathbf{L}$ (dont les espaces des représentations considérées sont des sous-espaces) se définit aisément par :

$$(T_{(s,s)}f)\,(h) = f(s^{-1}\,hs) = f(h^{*-1}),$$

d'après notre traitement général des groupes « bilatères » (cf. appendice). En « ajoutant » l'opération parité ainsi définie au « bilatère » $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, on obtient le groupe que nous noterons symboliquement $(\mathbf{L} \times \mathbf{L} + P)$ ou $BP(\mathbf{L})$ (« bilatère avec parité ») engendré par les couples $(g, g') \in \mathbf{L} \times \mathbf{L}$, et le couple (s, s). Nous étudierons bientôt ce groupe, qui n'est pas le produit direct $\mathbf{L}_c \times \mathbf{L}_c$ (bilatère du groupe complet), comme extension (produit semi-direct) de $\mathbf{Z}_2$ (les entiers modulo 2) par $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$.

Comme $h^{*-1} = \bar{h}$ (pour $h \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{C}) \approx \mathbf{L}$), les paramètres de h^{*-1} seront ω^- et ω^+ (ceux de h étant ω^+ et ω^-). Donc :

$$PY_{mn}^{pq,p'q'}(\omega^+, \omega^-) = Y_{mn}^{pq,p'q'}(\omega^-, \omega^+)\,.$$

Ainsi, P échange ω^+ et ω^- (sans changer les « nombres magnétiques » p, p', q, q'), et par conséquent $PD_{mn} = D_{nm}$ (ce qui nous donne l'action de P sur les représentations de $\mathbf{L}$) et $P(D_{mn} \otimes D_{mn}) = D_{nm} \otimes D_{nm}$.

4. Passons maintenant à la *définition de T et C pour* $\mathbf{L}$, et pour les espaces des *représentations* de $BP(\mathbf{L}) = (\mathbf{L} \times \mathbf{L} + P)$. Dans l'espace de Minkowski, la matrice d'inversion temporelle est $-s = I_{31}$. Si on essaie de voir, de même qu'on a procédé pour P, quelle est l'action de T sur le groupe $\mathbf{L}$, on aboutit à la conclusion que c'est la même. Si donc nous voulons distinguer entre les opérations P et T dans le formalisme interne, il nous faut modifier quelque peu le traitement.

Considérons donc, dans l'espace de Minkowski « réel et imaginaire » le vecteur « purement temporel » $(O, it) = \mathrm{i}(O, t)$. L'action de l'inversion spatiale sur ce vecteur est alors la suivante :

$$T(\mathrm{i}(O, t)) = \mathrm{i}(O, -t) = \bar{\mathrm{i}}(O, t)\,.$$

En considérant alors l'espace de Minkowski « interne » comme un espace vectoriel abstrait M de dimension 4 sur le corps des complexes $\mathbf{C}$, espace sur lequel opèrent les transformations du groupe de Lorentz « interne »

(qui, dans le cas général, sera un sous-groupe du groupe de symétrie interne), nous pourrons définir l'opération T « interne » comme opération anti-linéaire sur cet espace, c'est-à-dire que $T(\alpha x) = \bar{\alpha} x$ pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, $x \in M$. Soit g une transformation de Lorentz, opérant sur M ; g étant inversible, si x décrit tout M, le vecteur transformé gx (g fixé) décrit tout M. D'après notre définition de l'action de T sur M, on aura :

$$T(\alpha(gx)) = \alpha(gx)\,, \quad \text{et} \quad T(\alpha x) = \bar{\alpha} x\,, \forall x \in M\,.$$

Il est convenable de définir T sur l' « anneau de groupe » de $\mathbf{L}$ (la même chose est d'ailleurs valable pour $\mathbf{L}_c$, ou pour O(3, 1)) ; « anneau » que l'on considère comme muni d'une structure d'algèbre sur $\mathbf{C}$ (c'est-à-dire que l'on considère les combinaisons linéaires formelles à coefficients complexes, et non pas seulement entiers), par :

$$T(\alpha g) = \bar{\alpha} g \qquad (\alpha \in \mathbf{C},\, g \in \mathbf{L})\,.$$

Dans la réalisation « complexe » de $\mathbf{L}$ (comme SO(3, $\mathbf{C}$), ou dans SO(4, $\mathbf{C}$)), on aura donc $T(\alpha g) = \bar{\alpha}\bar{g} = \overline{\alpha P(g)}$.

On définit donc, en définitive, T dans « l'anneau de groupe » de $\mathbf{L}$, comme $T(\alpha g) = \bar{\alpha} P(g)$, c'est-à-dire comme l'opération parité, plus une conjugaison « totale ».

Par conséquent, l'action de T sur les fonctions $Y_{mn}^{pqp'q'}(\omega^+, \omega^-)$, qui sont aussi les fonctions de base déterminant les représentations de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ (du moins, la partie centrale des représentations spinorielles) consistera en un échange de ω^+ et ω^-, plus conjugaison totale. Or un calcul simple montre qu'effectuer une conjugaison totale sur ces fonctions revient à changer ω^+ en ω^-, ω^- en ω^+, p en $-p$, q en $-q$, p' en $-p'$, q' en $-q'$. En effet, on a

$$\overline{(\sin\theta)^k} = \overline{\left(\frac{1}{2i}\right)^k (e^{i\theta} - e^{-i\theta})^k} = (\sin\bar{\theta})^{-k}\,,$$

comme on le voit en développant cette expression par la formule du binôme (on a $k \in \mathbf{Z}$, les entiers, dans tous les cas rencontrés), et bien sûr

$$\overline{e^{ip\varphi}} = e^{-ip\bar{\varphi}}\,, \quad \text{et} \quad \overline{\omega^+} = \omega^-$$

par définition. De même, d'ailleurs, la conjugaison sur les « fonctions sphériques complexes » $y_m^p(\theta^+, \varphi^+)$ revient à changer ω^+ en ω^-, et p en $-p$. Donc, sur les espaces des représentations de $\mathbf{L}$ et de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, l'action de T est tout simplement le *changement* $p \to -p, p' \to -p'$, et $q \to -q$, $q' \to -q'$ (puisque P échange déjà ω^+ et ω^- — pour $\mathbf{L}$ aussi, puisqu'il échange J_k^+ et J_k^-), c'est-à-dire un *changement de signe des poids* des représentations, remarque qui nous servira plus loin.

Comme $PD_{mn} = D_{nm}$, on aura des représentations irréductibles du groupe $BP(\mathbf{L})$ qui, sur $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, seront réductibles en $D_{mn} \otimes D_{mn} \oplus D_{nm} \otimes D_{nm}$,

ou même, plus généralement (mais nous nous limiterons au premier cas) en $D_{mn} \otimes D_{m'n'} \oplus D_{nm} \otimes D_{n'm'}$ (nous les étudierons plus loin). On peut être tenté de croire que, dans l'espace des représentations de ce groupe, il est possible de définir T comme opération linéaire, à partir de la matrice $-s$, de façon distincte de P. Nous allons voir qu'il n'en est rien. Groupons les fonctions de base $Y_{mn}^{pqp'q'}(h)$ en une matrice $D_{mn}(h)$ (h correspondant aux paramètres ω^+, ω^-), et considérons les matrices :

$$\gamma = \begin{pmatrix} D_{mn}(g^{-1}) & 0 \\ 0 & D_{mn}(g^*) \end{pmatrix}, \qquad \gamma' = \begin{pmatrix} D_{mn}(g') & 0 \\ 0 & D_{mn}(g'^{*-1}) \end{pmatrix}$$

et

$$\eta = \begin{pmatrix} D_{mn}(h) & 0 \\ 0 & D_{mn}(h^{*-1}) \end{pmatrix}.$$

D_{mn} étant une représentation, on aura :

$$\gamma\eta\gamma' = \begin{pmatrix} T_{(g,g')}\, D_{mn}(h) & 0 \\ 0 & T_{(gs,g's)}\, D_{mn}(h) \end{pmatrix}.$$

Notons par S la multiplication par s : $g \rightsquigarrow sg$, et posons $S_1 = \begin{pmatrix} 0 & S \\ {}^tS & 0 \end{pmatrix}$ et $S_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i}S \\ -i\,{}^tS & 0 \end{pmatrix}$ (où ${}^tS$ désigne l'opération transposée). Nous voulons définir T sur les fonctions de base (groupées en η) des représentations de $BP(\mathbf{L})$, à l'aide de s (ou de $-s$). Mais la transformation S transforme le produit $\gamma\eta\gamma'$ en $\gamma S_1\, \eta S_1\, \gamma' = \gamma\eta\gamma'$ comme on le voit immédiatement. On a le même résultat avec S_2. Ici aussi, on ne pourra éviter de prendre T antilinéaire, et la transformation qu'elle définira dans les espaces des représentations peut s'écrire, d'une façon condensée, sous la forme $T\eta = \overline{S_1\, \eta S_1}$. On retrouve que T laisse inchangés les $\omega^{\pm}$, et change p en $-p$, ..., q' en $-q'$.

Une fois définis P et T dans le formalisme interne, nous définirons $C = PT$, en accord avec le théorème de Lüders. On obtient immédiatement l'action de C sur les fonctions de base $D_{mn}(h)$:

$$C : p \to -p,\ q \to -q,\ p' \to -p',\ q' \to -q' \quad \text{et} \quad \omega^{\pm} \to \omega^{\mp}$$

c'est-à-dire une conjugaison totale.

Remarque. En considérant l'espace de Minkowski dans sa réalisation « complexe », on remarque que l'action de T peut aussi s'écrire $Tx = \bar{x}$, pour un vecteur x de cet espace. En prolongeant ceci aux espaces des représentations de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, donc aux fonctions de base $D_{mn}(h)$, on peut vouloir définir $TD_{mn}(h) = \overline{D_{mn}(h)}$, c'est-à-dire une conjugaison totale. Ceci correspond à définir T sur « l'anneau de groupe » de $\mathbf{L}$ comme $T(\lambda g) = \lambda g$, soit $T(\lambda g) = \bar{\lambda} P(g)$, donc comme une « prolongation antilinéaire » de P.

Cette façon de définir T revient à échanger les rôles de C et T. Nous retrouverons cette alternative tout au long de notre traitement des opérations P, C, T dans le formalisme interne. Nous formulerons les définitions dans le cadre étudié plus en détail ici, nous contentant de mentionner à chaque fois la possibilité d'un choix alternatif.

5. Etude des rapports entre L, L_c, $O(3,1)$, $SO(3,1)$, $SL(2,\mathbb{C})$, $(L \times L + P)$, et $(L \times L)$ au point de vue de la théorie des extensions de groupes. Rappelons que l'on appelle (cf. par exemple Kurosh, Group Theory, vol. II) extension d'un groupe B par un groupe A une suite exacte de groupes :

$1 \to A \xrightarrow{\varphi} G \xrightarrow{\psi} B \to 1$, où φ est un homomorphisme injectif (isomorphisme dans), ψ un épimorphisme (homomorphisme surjectif), et $\ker \psi = \mathrm{Im}\ \varphi$. On dit que c'est un produit semi-direct (et on notera $G = B.A$) s'il existe un « relèvement » ψ' de ψ, soit un isomorphisme de B dans G, tel que $\psi \circ \psi'$ soit l'identité sur B. On dit que c'est une extension centrale si l'image de B dans le groupe $\dfrac{\mathrm{Aut}\,(A)}{\mathrm{Int}\,(A)}$ des automorphismes de A modulo les automorphismes internes (obtenue en considérant les automorphismes internes de G définis par $\psi^{-1}(B)$ et leur action sur $\varphi(A)$) est l'identité.

PROPOSITION. *On a l'extension centrale* : $1 \to \mathbf{Z}_2 \xrightarrow{\varphi} \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \xrightarrow{\psi} \mathbf{L} \to 1$ *où* $\varphi(\mathbf{Z}_2) = \left\{ \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ *et où* ψ *est défini (en réalisation réelle de* $\mathbf{L}$*) par (cf.* ([8])) :

$$\psi\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{\delta}+\beta\bar{\gamma}) & -\mathrm{Im}\,(\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}) & \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta}) & \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta}) \\ \mathrm{Im}\,(\alpha\bar{\delta}+\beta\bar{\gamma}) & \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{\delta}-\beta\bar{\gamma}) & \mathrm{Im}\,(\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta}) & \mathrm{Im}\,(\alpha\bar{\gamma}+\beta\bar{\delta}) \\ \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{\beta}-\gamma\bar{\delta}) & -\mathrm{Im}\,(\alpha\bar{\beta}-\gamma\bar{\delta}) & \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta}) & \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}-\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta}) \\ \mathrm{Re}\,(\alpha\bar{\beta}+\gamma\bar{\delta}) & -\mathrm{Im}\,(\alpha\bar{\beta}+\gamma\bar{\delta}) & \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}-\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}-\delta\bar{\delta}) & \tfrac{1}{2}(\alpha\bar{\alpha}+\beta\bar{\beta}+\gamma\bar{\gamma}+\delta\bar{\delta}) \end{pmatrix}$$

matrice que nous noterons $(g_{\rho\sigma})$ $(\rho, \sigma = 1, ..., 4)$.

Aut $(\mathbf{Z}_2) = 1$, donc l'extension est nécessairement centrale (on a donc autant d'extensions inéquivalentes que d'éléments dans le deuxième groupe de cohomologie $H^2(\mathbf{L}, \mathbf{Z}_2)$; cf. Kurosh, ou aussi ([22])). Tout élément d'une extension de $\mathbf{L}$ par $\mathbf{Z}_2$ peut alors se mettre sous la forme d'un couple $((-1)^k, g)$ où $g \in \mathbf{L}$ et k entier, la loi de produit étant

$$((-1)^{k_1}, g_1)\,((-1)^{k_2}, g_2) = ((-1)^{k_1+k_2+\varepsilon(g_1,g_2)}, g_1\,g_2)\,,$$

le terme $(-1)^{\varepsilon(g_1,\,g_2)}$ étant un 2-cocycle, soit une application de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ dans $\mathbf{Z}_2$ telle que $\varepsilon(g_1, g_2) - \varepsilon(g_1, g_2g_3) + \varepsilon(g_1g_2, g_3) - \varepsilon(g_2, g_3)$ soit

pair ; on aura le produit direct $\mathbf{L} \times \mathbf{Z}_2$ si ce cocycle est un cobord, c'est-à-dire s'il existe une fonction $\eta : \mathbf{L} \to \mathbf{Z}$, telle que

$$\varepsilon(g_1, g_2) \equiv \eta(g_1) + \eta(g_2) - \eta(g_1, g_2) \text{ modulo } 2 .$$

Soit alors donné $g \in L$, et cherchons à déterminer une matrice

$$a = \begin{pmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$$

telle que $\psi(a) = g$. Les termes g_{44}, g_{33}, g_{43}, g_{34} nous fourniront les valeurs de $|\alpha|^2$, $|\beta|^2$, $|\gamma|^2$, $|\delta|^2$. De $g_{11} + ig_{12}$ et $g_{22} - ig_{21}$ on tirera $\alpha\bar{\delta}$ et $\beta\bar{\gamma}$; de même, on tirera $\alpha\bar{\gamma}$ et $\beta\bar{\delta}$ de $g_{31} + ig_{32}$ et $g_{41} + ig_{42}$, ainsi que $\alpha\bar{\beta}$ et $\gamma\bar{\delta}$ de $g_{13} - ig_{23}$ et $g_{14} - ig_{24}$. En outre, $\det a = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$. On connaît déjà

$$\theta_1 = \arg\alpha - \arg\beta, \quad \theta_2 = \arg\alpha - \arg\gamma, \quad \theta_3 = \arg\alpha - \arg\delta ,$$

et

$$\theta_4 = \arg\beta - \arg\gamma, \quad \theta_5 = \arg\beta - \arg\delta, \quad \theta_6 = \arg\gamma - \arg\delta \ \text{(modulo } 2\pi) .$$

Posons $t = \arg\alpha$.
On tire des relations précédentes

$$\arg\beta = t - \theta_1, \quad \arg\gamma = t - \theta_2, \quad \text{et } \arg\delta = t - \theta_3 .$$

D'où $\arg\beta\gamma = 2t - \theta_1 - \theta_2$, $\arg\alpha\delta = 2t - \theta_3$,

et la relation $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ donne :

$$e^{2it} = (|\alpha\delta|\, e^{i\theta_3} - |\beta\gamma|\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}) ,$$

ce qui déterminera t modulo π ; donc α, β, γ, δ seront connus, au même facteur ± 1 près. A la matrice $g \in \mathbf{L}$ correspond ainsi « une » matrice $\pm a$. On peut donc écrire le couple $((-1)^k, g)$ sous la forme $((-1)^k, \pm a)$. Ecrivons alors la matrice $a \in \mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ sous la forme $((-1)^\eta, \pm a)$, où pour $\eta(a)$ on prend le nombre entier $\left[\frac{\arg\alpha}{\pi}\right]$ par exemple. Au produit $a_1 a_2$ correspondra le couple

$$((-1)^{\eta(a_1 a_2)}, \pm a_1 a_2) , \quad \text{avec} \quad \eta(a_1 a_2) = \left[\frac{\arg(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\gamma_2)}{\pi}\right] .$$

Posons

$$\varepsilon(g_1, g_2) = \eta(a_1) + \eta(a_2) - \eta(a_1 a_2) ,$$

où $\pm a_j$ correspond à g_j ($j = 1, 2$). $\varepsilon(g_1, g_2)$ est un entier bien déterminé : en effet, changer un a_j en $-a_j$ dans sa définition ne le change pas. Le cocycle qu'il définit, par contre, n'est pas un cobord, car $\eta(a_j) \not\equiv \eta(-a_j)$ modulo 2, donc $\eta(a)$ ne définit pas une fonction $\mathbf{L} \to \mathbf{Z}$. Donc $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ est l'extension centrale de $\mathbf{L}$ par $\mathbf{Z}_2$ définie par le cocycle $(-1)^{\varepsilon(g_1, g_2)}$, avec le $\varepsilon(g_1, g_2)$

défini ci-dessus : la loi du produit dans cette extension met en effet SL(2, $\mathbf{C}$) en correspondance isomorphique avec elle.

Rappelons qu'un produit semi-direct peut être défini canoniquement à l'aide d'un homomorphisme $\theta : B \to \mathrm{Aut}\ A$ par la loi de multiplication suivante, sur les couples (a, b) $(a \in A,\ b \in B)$:

$$(a_1, b_2)\ (a_2, b_2) = (a_1\, \theta_{b_1}(a_2), b_1, b_2),$$

Si $\theta(B) \subset \mathrm{Int}\ (A)$, on trouve un produit direct (à un isomorphisme près).

PROPOSITION. $\mathbf{L}_c$ *est produit semi-direct de* $\mathbf{Z}_2$ *par* $\mathbf{L} : 1 \to \mathbf{L} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{L}_c \xrightarrow{\psi} \mathbf{Z}_2 \to 1$, *défini par l'homomorphisme* $\mathbf{Z}_2 \to \mathrm{Aut}\ (\mathbf{L})$: $1 \rightsquigarrow$ *identité*, $-1 \rightsquigarrow P$ (*la parité*).

Le relèvement ψ' de ψ est immédiat : c'est l'application $\{(1, -1)\} \rightsquigarrow \{(1, s)\}$. Tout élément $g \in \mathbf{L}_c$ peut en effet s'écrire, d'une manière unique, $g = g_1 s^{\varepsilon}$, avec $g_1 \in \mathbf{L}$, où dét $g = (-1)^{\varepsilon}$ déterminera la parité de ε. Or

$$gg' = g_1 s^{\varepsilon} g'_1 s^{\varepsilon'} = g_1(s^{\varepsilon} g'_1 s^{-\varepsilon})\, s^{\varepsilon+\varepsilon'},$$

et $s^{\varepsilon} g'_1 s^{-\varepsilon}$ est égal à g'_1 si dét $g = +1$ et à Pg'_1 si dét $g = -1$. D'où la proposition, en écrivant tout élément $g \in \mathbf{L}_c$ sous la forme d'un couple : $(g_1,$ dét $g)$.

PROPOSITION : $\mathrm{O}(3, 1) \approx \mathbf{L}_c \times \mathbf{Z}_2$, produit direct.

En effet, tout élément $g = (g_{\rho\sigma}) \in \mathrm{O}(3, 1)$ peut s'écrire sous la forme d'un couple $(g_1, \mathrm{sgn} g_{44})$ avec $g_1 \in \mathbf{L}_c$. Or

$$(gg')_{44} = \sum_{\mu=1}^{4} g_{4\mu}\, g'_{\mu 4},$$

et

$$\left(\sum_{k=1}^{3} g_{4k}\, g'_{k4}\right)^2 \leqslant \left(\sum g^2_{4k}\right)\left(\sum g'^2_{k4}\right) = (g^2_{44} - 1)(g'^2_{44} - 1) < g^2_{44}\, g'^2_{44},$$

ce qui montre que

$$\mathrm{sgn}(gg')_{44} = (\mathrm{sgn}\ g_{44})(\mathrm{sgn}\ g'_{44}).$$

D'où le résultat.

PROPOSITION. $\mathrm{SO}(3, 1) = \mathrm{SO}_0(3, 1) \times \mathbf{Z}_2$.

De même, $\mathbf{L} = \mathrm{SO}_0(3, 1)$ jouant ici le rôle de $\mathbf{L}_c$ auparavant.

PROPOSITION. *On a le produit semi-direct* $1 \to \mathbf{L} \to \mathrm{O}(3, 1) \to \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \to 1$, *qui est défini par l'homomorphisme* $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 \to \mathrm{Aut}\ (\mathbf{L})$ *qui envoie* $(I, -I)$ *sur l'identité et* $(s, -s)$ *sur* P, *si l'on représente* $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ *sous la forme des matrices diagonales* 4×4 : $(I, s\,; -I, -s)$.

En effet, tout $g \in O(3, 1)$ s'écrit

$$g = g_1(-1)^{\varepsilon_1} s^{\varepsilon_2},$$

où

$$\varepsilon_1 = \operatorname{sgn} g_{44}\,,\ (-1)^{\varepsilon_2} = \operatorname{sgn}(g_{44}\ \text{dét}\ g)\,,\ \text{et}\ g_1 \in \mathbf{L}\,.$$

On peut alors représenter symboliquement les 4 nappes du groupe de Lorentz général de la façon suivante, en fonction des valeurs de g_{44} et de (g_{44} dét g) : figure 1. Notons $N(I)$, $N(s)$, $N(-I)$, $N(-s)$ ces 4 nappes. On a :

$$\mathbf{L} = \mathrm{SO}_0(3,1) = N(I)\,;\quad \mathrm{SO}(3,1) = N(I) \cup N(-I)$$

$$\mathbf{L}_c = N(I) \cup N(s)\,;\quad \mathrm{O}(3,1) = N(I) \cup N(s) \cup N(-s) \cup N(-I)\,.$$

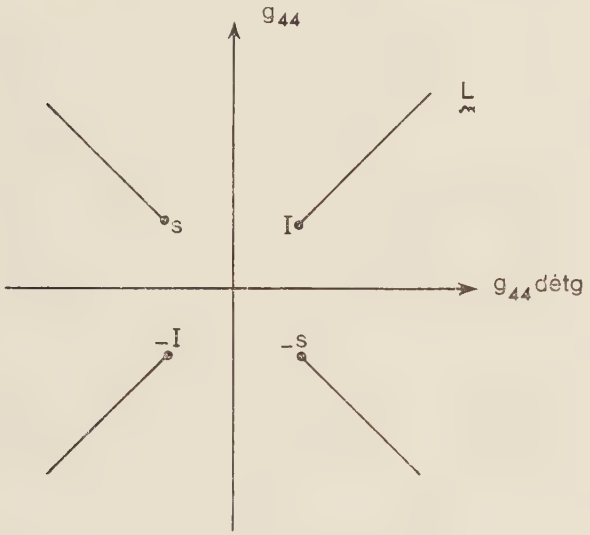


FIG. 1.

De plus, le passage $N(I) \to N(s)$ est la symétrie spatiale. Le passage $N(I) \to N(-s)$ est la symétrie temporelle, et le passage $N(I) \to N(-I)$ est le produit des deux. On peut ainsi « visualiser » la figure 1 en considérant que l'axe des (g_{44} dét g) est le profil de l'hyperplan d'espace, et l'axe des g_{44} celui du temps. Une autre interprétation des *opérations* P, C, T (internes) peut alors consister à considérer ces opérations comme des *applications de* O(3, 1) *sur lui-même* (qui ne sont pas des homomorphismes de groupe), en considérant que P est la symétrie par rapport à l'axe g_{44}, T la symétrie par rapport à l'axe (g_{44} dét g), et (en faisant $PCT = 1$) C la symétrie par rapport à l'origine (qui notamment échange les 2 nappes de SO(3, 1), de même que P échangeait les 2 nappes de $\mathbf{L}_c$). Cette interprétation est en fait une pure transcription de la définition des opérations de symétrie spatiale et temporelle, et a l'inconvénient de ne pas faire intervenir la structure de groupe (donc n'a pas de sens dans l'algèbre de Lie £).

Etudions maintenant le groupe $BP(\mathbf{L}) = (\mathbf{L} \times \mathbf{L} + P)$.

PROPOSITION. *On a le produit semi-direct* $1 \to \mathbf{L} \times \mathbf{L} \to BP(\mathbf{L}) \to \mathbf{Z}_2 \to 1$, *correspondant à l'homomorphisme* $\mathbf{Z}_2 \to \mathrm{Aut}\,(\mathbf{L} \times \mathbf{L})$: $1 \rightsquigarrow$ *identité, et* $-1 \rightsquigarrow P \times P$, *où*

$$P \times P : (g, g') \rightsquigarrow (g^{*-1}, g'^{*-1}) .$$

$BP(\mathbf{L})$ est en effet engendré par $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ et le couple (s, s), et le calcul fait pour l'étude de $\mathbf{L}_c$ est valable ici aussi. Ce groupe est distinct de $\mathbf{L}_c \times \mathbf{L}_c$, lequel s'obtient en adjoignant à $BP(\mathbf{L})$ un autre élément, par exemple le couple $(s, 1)$.

6. Représentations spinorielles de $\mathbf{L}_c$, O(3, 1), et $BP(\mathbf{L})$. On connaît les représentations D_{mn} du groupe propre $\mathbf{L}$. Construisons, à partir d'elles, des représentations des groupes en question. Le groupe $\mathbf{L}_c$ peut être considéré comme « $\mathbf{L} + P$ », c'est-à-dire comme obtenu par adjonction à $\mathbf{L}$ d'un élément s, dont le produit avec $\mathbf{L}$ donne la nappe $N(s)$ de $\mathbf{L}_c$. Considérons donc les représentations $D_{mn} \oplus PD_{mn}$ de $\mathbf{L}$. A tout élément $g \in \mathbf{L}$, faisons donc correspondre la matrice

$$\begin{pmatrix} D_{mn}(g) & 0 \\ 0 & D_{mn}(g^{*-1}) \end{pmatrix} .$$

Par ailleurs, on sait que tout $g \in N(s)$ s'écrit (de façon unique) $g = sg_1$, $g_1 \in \mathbf{L}$; à $g \in N(s)$ nous ferons alors correspondre la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & D_{mn}(g_1^{*-1}) \\ D_{mn}(g_1) & 0 \end{pmatrix} = \Delta_{mn}(g) .$$

On obtient alors une représentation irréductible Δ_{mn}. C'est une représentation, car, pour $g = sg_1$, $g' = sg_2$, donc $gg' = (Pg_1).g_2$:

$$\begin{pmatrix} 0 & D_{mn}(g_1^{*-1}) \\ D_{mn}(g_1) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & D_{mn}(g_2^{*-1}) \\ D_{mn}(g_2) & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} D_{mn}(g_1^{*-1})\, D_{mn}(g_2) & 0 \\ 0 & D_{mn}(g_1)\, D_{nm}(g_2^{*-1}) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} D_{mn}(Pg_1)\, D_{mn}(g_2) & 0 \\ 0 & D_{mn}(g_1)\, D_{mn}(Pg_2) \end{pmatrix}$$

d'où

$$\Delta_{mn}(sg_1 . sg_2) = \Delta_{mn}(sg_1)\, \Delta_{mn}(sg_2) .$$

On montrerait de même que

$$\Delta_{mn}(sg_1 . g_2) = \Delta_{mn}(sg_1)\, \Delta_{mn}(g_2) .$$

Cette représentation se décompose sur $\mathbf{L}$ en $D_{mn} \oplus PD_{mn}$. L'opération $S = \Delta_{mn}(s)$ est ici la matrice $\begin{pmatrix} 0I \\ I0 \end{pmatrix}$, où I est la matrice identité d'ordre $(2m + 1)(2n + 1)$. On vérifie aisément que, pour $m \neq n$, la représentation est irréductible. La matrice de passage $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I & I \\ I & -I \end{pmatrix}$ (de carré l'identité) amène $\Delta_{mn}(g)$ $(g \in \mathbf{L})$ sous la forme

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + P & I - P \\ I - P & I + P \end{pmatrix} \otimes D_{mn}(g) ,$$

et $\Delta_{mn}(sg_1)$ $(g_1 \in \mathbf{L})$ sous la forme

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} I + P & I - P \\ -I + P & -I - P \end{pmatrix} \otimes D_{mn}(g_1) ,$$

où l'on considère la matrice écrite à gauche comme matrice d'opérateurs. Ce ne sont pas là les seules représentations. En effet, on sait par exemple que la représentation $D_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$ (d'ordre 4) de $\mathbf{L}$ s'étend à une représentation du même ordre du groupe complet $\mathbf{L}_c$, et de O(3, 1) aussi.

Comme $O(3, 1) = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{L}_c$, toute représentation de chaque facteur est représentation de O(3, 1). En outre, si Δ est une représentation de $\mathbf{L}_c$, l'application $g \rightsquigarrow (\mathrm{sgn} g_{44})\, \Delta((\mathrm{sgn} g_{44})\, g)$ est une représentation du groupe général O(3, 1).

Dans le cas du groupe $BP(\mathbf{L})$, de même, les représentations

$$D_{mn} \otimes D_{m'n'} \oplus PD_{mn} \otimes PD_{m'n'} ,$$

réductibles sur $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, seront (pour $m \neq n$, $m' \neq n'$) irréductibles pour tout le groupe, et en particulier la partie centrale de ces représentations. On les construira, sur tout $BP(\mathbf{L})$, comme on a procédé pour $\mathbf{L}_c$.

7. Définition de T et C pour £. On a vu qu'il était convenable de définir T par $T(\lambda g) = \bar{\lambda} g$ pour l'anneau de groupe de $\mathbf{L}$. Cherchons maintenant à définir cette opération dans l'algèbre de Lie £ ; on se heurte à la même difficulté si on essaye de le faire à l'aide de la matrice $-s = I_{31}$, ou encore à partir de la représentation infinitésimale : on ne peut pas distinguer entre P et T. Si l'on veut malgré tout distinguer entre ces opérations dans le formalisme interne, on ne pourra pas ici définir T comme automorphisme de £. Nous avons alors deux possibilités de « prolonger » la définition de T à l'algèbre de Lie.

La première consiste à définir T, non pas sur £, mais sur $£_{(\mathbf{C})}$, comme *la conjugaison de* $£_{(\mathbf{C})}$ par rapport à la forme réelle £. En d'autres termes, pour $l \in £$, $\lambda \in \mathbf{C}$, on aura $T(\lambda l) = \bar{\lambda} l$. La définition de C s'ensuivra alors, par $C = PT$, P étant considéré comme opération linéaire. Ainsi, si $l = a + b$

est la décomposition de $l \in \mathfrak{L}$ qui correspond à la décomposition de Cartan $\mathfrak{L} = (a_k) + (b_k)$ on aura

$$P(\lambda l) = \lambda(a - b)\,; \quad T(\lambda l) = \bar{\lambda}(a + b)\,; \quad C(\lambda l) = \bar{\lambda}(a - b)\,.$$

En particulier, tout élément de $\mathfrak{L}_{(\mathbf{C})}$ étant de la forme $l + \mathrm{i}l'$, où $l, l' \in \mathfrak{L}$, on aura en écrivant $l = a + b$, $l' = a' + b'$:

$$C(l + \mathrm{i}l') = a + \mathrm{i}b' - b - \mathrm{i}a'$$

$$T(l + \mathrm{i}l') = a + b \quad - \mathrm{i}a' - \mathrm{i}b'$$

$$P(l + \mathrm{i}l') = a + \mathrm{i}a' - b - \mathrm{i}b'\,.$$

Ici aussi, on peut considérer T comme opération antilinéaire, identique à P sur $\mathfrak{L}$, ce qui revient à échanger les rôles de C et T.

La seconde possibilité de définir C et T sur $\mathfrak{L}$ ne fait pas intervenir directement l'algèbre complexe dans la définition. Ici aussi, on pourra, si l'on préfère, échanger les rôles de T et C. Pour cette définition, nous considérerons l'action de T et C sur les « nombres magnétiques » (changement de signe), que nous avons obtenue plus haut, comme justification du prolongement à $\mathfrak{L}$ de la définition de T. Mais auparavant, faisons une remarque. Nous savons qu'en physique quantique on préfère avoir affaire à des opérateurs hermitiens, dont les valeurs propres sont réelles. C'est ainsi que l'on préférera, au lieu de l'algèbre de Lie réelle $\mathfrak{so}(3)$, dont les relations de commutation s'écrivent, dans la base (a_k) $(k = 1, 2, 3)$: $[a_l, a_j] = \varepsilon_{ljk}\, a_k$, considérer l'algèbre de Lie (« imaginaire pure ») dont la base est $(\mathrm{i}a_k)$ et les relations de commutation, par conséquent, $[\mathrm{i}a_l, \mathrm{i}a_j] = + \mathrm{i}\varepsilon_{ljk}(\mathrm{i}a_k)$; en effet, dans les représentations de dimension finie, les opérateurs représentant les a_k sont antihermitiens, alors que ceux représentant les $\mathrm{i}a_k$ sont hermitiens ; pour ce qui est des valeurs propres e l'opérateur de Casimir $\sum a_k^2$, la distinction n'est qu'un changement de signe ; il n'en est pas de même pour les générateurs, et l'opérateur $(\mathrm{i}a_3)$ par exemple aura des valeurs propres réelles, celles de a_3 étant imaginaires pures. On est ainsi amené à considérer une algèbre de Lie à constantes de structure imaginaires pures (dont la correspondance avec une algèbre de Lie sur $\mathbf{R}$ est immédiate) — que l'on ne peut traiter rigoureusement que comme algèbre de Lie sur $\mathbf{C}$ (auquel cas la notion d'algèbre compacte perd sa signification), ou en considérant l'algèbre réelle correspondante.

Si alors nous considérons, sur l'algèbre de Lie « physique », l'opérateur T comme antilinéaire, coïncidant avec l'identité sur les générateurs, nous aurons évidemment $T(\mathrm{i}X) = - \mathrm{i}T(X) = - \mathrm{i}X$ pour X dans l'algèbre de Lie réelle correspondante. Ainsi, dans l'algèbre réelle correspondante, l'opération T se manifeste comme le changement de X en $- X$, c'est-à-dire le passage à l'algèbre de Lie opposée, dont les constantes de structure sont de signe opposé. Cette opération est un isomorphisme entre l'algèbre de

Lie (réelle) de départ et son algèbre opposée, et elle se prolonge (cf. Bourbaki ([12])) en un isomorphisme des algèbres enveloppantes, lequel peut être considéré comme antiautomorphisme de la première algèbre enveloppante, appelé antiautomorphisme principal. Ainsi, si $X_1, ..., X_n$ désignent n éléments de l'algèbre de Lie (ainsi que leurs images canoniques dans l'algèbre enveloppante) on aura

$$T(X_1 \dots X_n) = (-1)^n X_n \dots X_1 .$$

Dans cette interprétation, C sera une application semi-linéaire de l'algèbre enveloppante, dont l'application linéaire associée est P (puisque l'on définit $C = PT$) ; elle correspond à la $*$ - opération introduite par Kostant, par analogie avec la conjugaison hermitienne ($x + iy \rightsquigarrow -x + iy$, pour $x, y \in \mathfrak{so}(3)$) de l'algèbre complexe $\mathfrak{so}(3)_{(\mathbf{C})}$.

Explicitons l'action de P, C, T sur £, par rapport à la décomposition de Cartan $l = a + b$ des $l \in £$:

$$P(a + b) = a - b\,;\ T(a + b) = -(a + b)\,;\ C(a + b) = -a + b\,.$$

Ainsi, C est un changement de signe sur les éléments de la sous-algèbre compacte maximale (correspondant à la décomposition de Cartan choisie).

Cette dernière définition de C et T se justifie par l'action, que nous avons vue, de ces opérations sur les « nombres magnétiques », qui sont les poids associés à la représentation considérée. Or les poids sont les valeurs propres des générateurs d'une sous-algèbre de Cartan de $£_{(\mathbf{C})}$, donc sont définis par les équations $H_i u = p_i u$ (u vecteur propre, dans l'espace de la représentation ; H_i opérateur sur cet espace, représentant l'élément correspondant de l'algèbre de Cartan ; $i = 1, ..., l$, où l ($= 2$ ici) est le rang de l'algèbre). Changer p_i en $-p_i$ revient alors à changer H_i en $-H_i$. Cette opération (qui peut aussi se prolonger en automorphisme de toute l'algèbre — mais alors on retombe sur la même difficulté, distinguer P et T) peut être prolongée en l'antiautomorphisme de l'algèbre enveloppante de $£_{(\mathbf{C})}$, donc en celui de £ aussi. On retrouve l'opération T précédemment définie, et par conséquent C aussi. Si alors, comme nous le verrons plus loin (au troisième chapitre) on considère (cf. aussi ([9])) que le passage particule-antiparticule est donné par l'opération $T = PC$, comme cette dernière change les signes de tous les générateurs, elle changera les signes des nombres quantiques liés à l'algèbre interne ; l'opération C changera ceux qui figurent dans la sous-algèbre compacte maximale (dont le groupe correspondant a des représentations unitaires en dimension finie, contrairement au reste du groupe interne, qui est non compact). Ce que nous venons de voir ici n'est pas particulier à £ ; cela s'applique à toute algèbre contenant £, si l'on utilise pour définir C et T les définitions abstraites obtenues pour £. C'est ce que nous allons faire, du moins dans une première étape.

8. Généralisation de P, C, T aux groupes lorentziens, et à leurs algèbres de Lie. — Dans le cas des algèbres tout d'abord, la définition de P comme

automorphisme involutif correspondant à une décomposition de Cartan s'étend à toute algèbre de Lie semi-simple contenant £, et il est toujours possible de l'étendre de façon à retomber sur l'automorphisme

$$P = a + b \rightsquigarrow a - b \quad \text{de} \quad £,$$

par restriction à £. On choisira donc une décomposition de l'algèbre semi-simple $\mathfrak{s}_0$ considérée, $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$ (où $\mathfrak{k}_0$ est l'algèbre) et on définira P par $P(k + p) = k - p$ ($k \in \mathfrak{k}_0$, $p \in \mathfrak{p}_0$), en choisissant $\mathfrak{k}_0 \supset (a_k)$ et $\mathfrak{p}_0 \supset (b_k)$, ce qui est toujours possible si $\mathfrak{s}_0 \supset £$.

Une remarque s'impose cependant. S'il existe une sous-algèbre de Cartan dans $\mathfrak{k}_0$ (et c'est le cas pour certaines formes réelles, comme les formes $\mathfrak{su}(p, q)$) l'automorphisme involutif considéré sera interne (c'est ce qui se passera entre autres pour $\mathscr{S}$), bien que sa restriction à £ soit externe (cf. ([19])).

Par ailleurs, si on cherche à voir ce que donne une définition directe de P dans le cas du groupe conforme (cf. appendice) à l'aide de la représentation infinitésimale de ce dernier dans l'espace de Minkowski, on trouve bien

$$PM_{jk} = M_{jk} \quad \text{et} \quad PM_{k4} = - M_{k4},$$

mais aussi

$$PA_0 = A_0, \quad Pp_\mu = - g_{\mu\nu} p_\nu, \quad PA_\mu = - g_{\mu\nu} A_\nu,$$

ce qui ne correspond pas à la définition « étendue » ci-dessus. Notons cependant que la représentation du groupe conforme dans l'espace de Minkowski n'est pas linéaire, que le recouvrement universel de ce groupe a un centre (discret mais) infini, et la forme réelle $\mathfrak{so}(4, 2) \approx \mathfrak{su}(2, 2)$ que nous noterons $\mathscr{S}$, est une forme réelle « interne », en ce sens que l'automorphisme involutif que détermine une décomposition de Cartan de cette algèbre est interne. La définition ci-dessus, appliquée à $\mathfrak{so}(4, 2)$, donnerait : $P : p_k \leftrightarrow - A_k, p_4 \leftrightarrow A_4, A_0 \rightarrow - A_0$. Elle échange $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ et $g^{\mu\nu} A_\mu A_\nu$, mais conserve $g^{\mu\nu} p_\mu A_\nu + g^{\mu\nu} A_\mu p_\nu$.

Etudions de plus près la *définition directe de P, C, T sur l'algèbre de Lie $\mathscr{S}$ du groupe conforme*, soit $\mathfrak{so}(4, 2) \approx \mathfrak{su}(2, 2)$, à l'aide de la représentation infinitésimale. On voit que

$$PM_{\mu\nu} = g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} M_{\rho\sigma} = TM_{\mu\nu},$$

alors que

$$Pp_\mu = - g_{\mu\nu} p_\nu = - Tp_\mu, PA_\mu = - g_{\mu\nu} A_\nu = - TA_\mu, PA_0 = A_0 = TA_0.$$

Ainsi, sur les générateurs de $\mathscr{S}$, on peut distinguer entre les définitions de P et de T, ce qui n'est pas le cas pour £ (mais ce qui est évidemment le cas pour l'algèbre de Lie $\mathscr{P}$ du groupe de Poincaré). A l'aide des relations de commutation de $\mathscr{S}$, on voit aisément que *P et T sont des automorphismes involutifs de $\mathscr{S}$*. Etudions-les, et posons pour cela

$2\,a'_k = p_k - A_k, 2\,b'_k = p_k + A_k, 2\,c_2 = p_4 + A_4, 2\,c_1 = p_4 - A_4, c_3 = -A_0,$

a_k et b_k étant définis comme dans £. On voit immédiatement que les (a_k, a'_k) $(k = 1, 2, 3)$ et c_2 engendrent une sous-algèbre compacte maximale, alors que les sous-groupes à un paramètre engendrés par les b_k, b'_k, c_1, c_3 ne sont pas compacts. De la façon dont nous les avons définis (directement) sur $\mathscr{S}$, on voit que P a les valeurs propres + 1 sur (a_k, c_1, c_2, c_3) et − 1 sur (b_k, b'_k, a'_k), alors que T a les valeurs propres + 1 sur (a_k, a'_k, b'_k, c_3) et − 1 sur (b_k, c_1, c_2) ; si on définit $C = PT$, on voit que C est lui aussi un automorphisme involutif de $\mathscr{S}$, de valeurs propres + 1 sur (a_k, b_k, c_3) et − 1 sur le reste, soit (a'_k, b'_k, c_1, c_2). Prolongeons alors les opérations P, C, T ainsi définies à l'algèbre complexe $\mathscr{S}_{(\mathbf{C})}$, par linéarité et remarquons que l'algèbre *réelle*, forme réelle de $\mathscr{S}_{(\mathbf{C})}$, de générateurs

$$(a_k, ib_k, ic_3 ; ia'_k, b'_k, c_1, ic_2)$$

est isomorphe à $\mathscr{S} = \mathfrak{so}(4, 2)$, alors que celle de générateurs

$$(a_k, ic_1, c_2, ic_3 ; b_k, b'_k, ia'_k)$$

est isomorphe à $\mathfrak{so}(3, 3) = \mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$ et celle de générateurs

$$(a_k, a'_k, ic_3, ib'_k ; b_k, c_1, ic_2)$$

est isomorphe à $\mathfrak{so}(5, 1)$ — on vérifie que ce sont bien des formes réelles $\mathfrak{s}_0$ en constatant que l'algèbre $\mathscr{S} \otimes \mathbf{C} = \mathscr{S}_{(\mathbf{C})|\mathbf{R}} = \mathfrak{sl}(4, \mathbf{C})$ (« forme réelle jumelle » de $\mathscr{S}_{(\mathbf{C})}$, à partir de laquelle, par extension à $\mathbf{C}$ du corps des scalaires, on obtient une algèbre isomorphe à $\mathscr{S}_{(\mathbf{C})} \oplus \mathscr{S}_{(\mathbf{C})}$) se décompose en $\mathfrak{s}_0 + i\mathfrak{s}_0$, si l'on note $X + iY$ les éléments de $\mathscr{S} \otimes \mathbf{C}$, avec $X, Y \in \mathscr{S}$. En restreignant alors P, C, T à ces diverses formes réelles, on voit que C est l'automorphisme involutif interne de $\mathfrak{so}(4, 2)$ défini par la décomposition de Cartan écrite ci-dessus (on a séparé par un point virgule les générateurs de l'algèbre de ceux de l'espace vectoriel), P l'automorphisme involutif externe de la forme normale $\mathfrak{so}(3, 3)$, et T l'automorphisme involutif externe de la forme $\mathfrak{so}(5, 1) \approx \mathfrak{su}^*(4)$ (on dénote par $\mathrm{SU}^*(2n)$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}(2n, \mathbf{C})$ des matrices commutant avec la transformation

$$(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{2n}) \rightsquigarrow (\bar{z}_{n+1}, \ldots, \bar{z}_{2n}, -\bar{z}_1, \ldots, -\bar{z}_n) \text{ de } \mathbf{C}^{2n}).$$

D'où les définitions suivantes de P, C, T dans l'algèbre de Lie $\mathscr{S}$ du groupe conforme :

Définition. P, C, T sont des automorphismes involutifs de $\mathscr{S}$, P et T externes, et C interne, tels qu'il existe des formes réelles qui sont (respectivement) $\mathfrak{so}(3, 3)$, $\mathfrak{so}(4, 2) \approx \mathscr{S}$, $\mathfrak{so}(5, 1)$ sur lesquelles la prolongation par linéarité de P, C, T à $\mathscr{S}_{(\mathbf{C})} \approx \mathfrak{sl}(4)$ induit l'automorphisme involutif correspondant à une décomposition de Cartan.

La forme explicite de ces automorphismes a été donnée plus haut. Cette définition semble plus naturelle que celle que l'on a été obligé de faire dans le cas de £ (sur lequel les automorphismes ci-dessus coïncident) pour distinguer entre les diverses opérations. Il n'en reste pas moins que les définitions précédentes de P, C, T pour £ se prolongent de façon immédiate à $\mathscr{S}$, ainsi qu'à toute algèbre de Lie non compacte d'ailleurs.

Notons ici le résultat suivant, dû à Cartan (1925) :

THÉORÈME. *Soit* u *une algèbre de Lie simple compacte. Le groupe quotient* Aut (u)/Int (u) *est l'identité si* u *est des types* $\mathfrak{b}_n$, $\mathfrak{c}_n$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{g}_2$, *isomorphe à* $\mathbf{Z}_2$ *pour* $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{d}_n$ (*pour* $n \geqslant 5$), $\mathfrak{e}_6$, *et isomorphe au groupe* (3 !) *des permutations de* 3 *objets pour* $\mathfrak{d}_4$.

Ce résultat est d'ailleurs immédiatement visible sur les diagrammes de Dynkin des algèbres en question. Un résultat semblable existe (Cartan, 1927) pour les formes réelles non compactes (et les formes « jumelles ») des algèbres simples complexes : sauf pour les formes normales du type $\mathfrak{d}_{2m}$ ($m \geqslant 2$) et la forme jumelle de $\mathfrak{d}_4$, le groupe Aut/Int se compose uniquement d'éléments involutifs (y compris l'identité).

Dans le cas d'une algèbre de Lie (non compacte) contenant £, on peut évidemment aussi définir, comme pour £, P comme automorphisme correspondant à une décomposition de Cartan, T comme anti-automorphisme principal de l'algèbre enveloppante (ou encore comme conjugaison de l'algèbre complexe par rapport à la forme réelle considérée) et $C = PT$ (ou encore les deux possibilités, où l'on échange les rôles de C et T), la décomposition de Cartan contenant celle considérée de £. Cette définition s'étend d'ailleurs (sauf pour ce qui est de retrouver P sur la sous-algèbre £) à toute algèbre non compacte.

Dans le cas des algèbres réelles de types $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{d}_n$ ou $\mathfrak{e}_6$, que la forme réelle soit compacte ou non, on pourra aussi prolonger abstraitement la propriété de P d'être un automorphisme involutif externe en définissant P comme un *automorphisme involutif externe* (qui coïncide avec le P défini sur £ dans le cas des algèbres contenant £) ; dans le cas de $\mathfrak{d}_4$ et des formes normales $\mathfrak{so}(2n, 2n)$ ($n \geqslant 2$) le traitement pourra d'ailleurs être légèrement différent, car on a au moins 3 automorphismes « externes » involutifs non conjugués. La définition de T comme anti-automorphisme principal (et de $C = PT$) pourra alors être étendue à toutes ces algèbres, d'où un deuxième type de traitement des opérateurs P, C, T dans le formalisme « fort ».

La définition la plus naturelle (à cause de son origine géométrique dans le cas de $\mathscr{S}$, qui montre l'intérêt de relier P, C et T à des décompositions de Cartan) nous semble cependant être la suivante, dans toutes les algèbres ayant des formes réelles « externes », soit (pour ce qui est des algèbres simples ; la généralisation au cas semi-simple est immédiate) les types $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{d}_n$, $\mathfrak{e}_6$, définition qui généralise de façon abstraite celle faite dans le cas $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_3$ pour $\mathscr{S}$. Avant de la donner, rappelons que $\mathfrak{a}_{2n-1}$ possède

deux formes réelles externes, à savoir $\mathfrak{sl}(2n, \mathbf{R})$ et $\mathfrak{su}^*(2n)$, les formes $\mathfrak{su}(p, q)$ $(p + q = 2n)$ étant internes, que $\mathfrak{a}_{2n}$ possède une seule forme réelle externe, $\mathfrak{sl}(2n + 1, \mathbf{R})$, que les formes réelles $\mathfrak{so}(2p + 1, 2q + 1)$ de $\mathfrak{d}_n(2n = 2p + 2q + 2)$ sont externes, alors que les formes $\mathfrak{so}(2p, 2q)$ $(2p + 2q = 2n)$ et $\mathfrak{so}^*(2n)$ (cf. ([19]) pour cette notation) sont internes, et enfin que $\mathfrak{e}_6$ possède deux formes réelles externes (notées $\mathfrak{e}_{6,0,*}$ et $\mathfrak{e}_{6,2,*}$ en ([17])).

Définition. *Dans les algèbres formes réelles internes des types* $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{d}_n$, $\mathfrak{e}_6$ $(n \geqslant 2)$, P est défini comme un automorphisme involutif externe (coïncidant avec le P défini sur £ pour ces algèbres qui contiennent £, sauf $\mathfrak{a}_2$), définissant une forme réelle normale (il est unique, à une conjugaison près par un automorphisme interne). C sera un automorphisme involutif, qui définit une forme réelle isomorphe à l'algèbre réelle (non compacte) sur laquelle on cherche à définir P, C, T et $\mathcal{T}$ sera alors un automorphisme involutif qui définit une autre forme réelle, C et T étant tels que $PC\mathcal{T} =$ l'identité.

Dans le cas des formes réelles *externes* des types $\mathfrak{a}_n$, $\mathfrak{d}_n$, $\mathfrak{e}_6$, et des formes réelles « jumelles » (cf ([19])), soit $\mathfrak{sl}(n + 1, \mathbf{C})$, $\mathfrak{so}(2n, \mathbf{C})$, $\mathfrak{e}_6 \otimes \mathbf{C}$, on définira P comme l'automorphisme involutif externe correspondant à une décomposition de Cartan, et C et T comme deux autres automorphismes involutifs, tels que $PCT = 1$ (et redonnant sur £ ce qu'on a trouvé pour P, pour tous ces cas hormis $\mathfrak{a}_2 \neq \mathfrak{d}_2$). Notons que, dans le choix explicite de P, C, T, la parité de n interviendra pour $\mathfrak{a}_n$ et $\mathfrak{d}_n$. Dans le cas des formes réelles *compactes*, on peut encore définir P, C, T comme trois automorphismes involutifs (sans aucun rapport ici avec une décomposition de Cartan de ces algèbres, évidemment, ni avec la définition de P sur £), P étant externe. Pour les formes réelles de $\mathfrak{b}_n$, et aussi celles de $\mathfrak{c}_n$ et des autres algèbres exceptionnelles, on peut encore prendre trois automorphismes involutifs pour P, C, T, redonnant P sur une sous-algèbre £ pour les formes réelles non compactes (hormis celle de $\mathfrak{g}_2$). Enfin, pour $\mathfrak{so}(8, \mathbf{C})$ et $\mathfrak{so}(2n, 2n)$ $(n \geqslant 2)$, un traitement abstrait, intrinsèque à l'algèbre considérée, est possible.

Une autre possibilité de définir C (ou T si l'on préfère) dans le cas des algèbres compactes consisterait (P étant pris comme automorphisme involutif) à prendre pour C la conjugaison de l'algèbre complexe par rapport à la forme réelle compacte (soit prolonger l'identité, par antilinéarité, à l'algèbre complexe) : ceci entraîne un changement de signe des opérateurs (hermitiens) de l'algèbre « physique », d'où changement de signe des nombres quantiques par eux définis. Insistons ici sur le caractère nettement plus abstrait de toute définition de P, C, T dans les algèbres compactes (on perd toute référence à une décomposition de Cartan de l'algèbre en question), ainsi que dans les algèbres ne contenant pas £ (on perd toute référence à la définition de P sur £). Remarquons aussi la différence entre les algèbres contenant strictement £ et £ elle-même, au point de vue des

possibilités de définition « linéaire » des opérations P, C, T. Nous retrouverons ce phénomène (d'un autre point de vue) à la fin du deuxième chapitre.

Ces définitions de P, C, T dans les algèbres de Lie (et notamment dans celles qui contiennent strictement £) s'étendent sans difficulté majeure aux groupes de Lie connexes correspondants. On sait en effet (cf. ([13])) que si Aut (A) désigne le groupe des automorphismes d'un groupe de Lie réel connexe A (automorphismes analytiques évidemment), Aut $(\tilde{A})$ celui de son recouvrement universel $\tilde{A}$, et Aut (a) celui de leur algèbre de Lie, on a Aut $(\tilde{A}) \approx$ Aut (a) (leur algèbre de Lie étant Dér (a), celle des dérivations de a), Aut (A) étant le sous-groupe de Aut $(\tilde{A})$ formé des automorphismes appliquant le noyau de l'épimorphisme $\tilde{A} \to A$ sur lui-même. En notant Z le centre de A, $\tilde{Z}$ celui de $\tilde{A}$, Int (a) le groupe adjoint de A, groupe des automorphismes « internes » de a, et Int $(A) \approx$ Int $(\tilde{A}) \approx \frac{A}{Z} \approx \tilde{A}/\tilde{Z}$ le groupe des automorphismes « internes » de A (= celui de $\tilde{A}$), qui, si a est semi-simple, est la composante connexe de l'identité de Aut $(\tilde{A})$, on aura $\frac{\text{Aut (a)}}{\text{Int (a)}} \approx \frac{\text{Aut } (\tilde{A})}{\text{Int } (\tilde{A})}$, et $\frac{\text{Aut } (A)}{\text{Int } (A)}$ en sera un sous-groupe (on suppose Int (a) fermé dans Aut (a), ce qui est le cas pour a semi-simple). Pour $\tilde{A}$ compact simple, on connaîtra donc $\frac{\text{Aut } (\tilde{A})}{\text{Int } (\tilde{A})}$, d'où la définition de P comme automorphisme externe pour les types A_n, D_n, E_6. En outre, la définition de P, C, T dans a (comme certains automorphismes involutifs) définira P, C, T dans le groupe de Lie (compact ou non) connexe et simplement connexe $\tilde{A}$, puisque tout homomorphisme entre deux algèbres de Lie réelles est la différentielle (cf ([13])) d'un homomorphisme des groupes de Lie connexes et simplement connexes correspondants. Il suffira alors de choisir les automorphismes P, C, T sur $\tilde{A}$ de telle façon qu'ils induisent un automorphisme du noyau de l'application de recouvrement $\tilde{A} \to A$, pour avoir leur définition sur le groupe de Lie réel connexe A, comme certains automorphismes involutifs ; ceci est toujours possible (cf ([19]), IV 3, 5 et VI 1, 1). Dans le cas du groupe conforme, on peut aussi se servir (comme nous l'avons fait pour **L** et O(3, 1)) de la description géométrique de ce groupe (cf. appendice).

Notons pour terminer cette étude qu'une définition précise (c'est-à-dire en précisant l'action des automorphismes considérés) ne pouvait être faite dans le cadre abstrait et général qui était le notre. Une étude particulière doit être faite, à l'intérieur de ce cadre, dans chaque cas précis, et comprenant entre autres (dans la mesure du possible) une explication géométrique du choix d'un automorphisme particulier, comme nous l'avons fait pour le groupe conforme.

9. Avant de conclure ce chapitre, développons un autre critère géométrique, qui, lui, limite supérieurement le choix du groupe de symétrie interne.

Par analogie avec la réalisation « réelle et imaginaire » de l'espace de Minkowski, supposons que $V = (V_1, ..., V_4)$ soit un « vecteur » d'un espace de Minkowski abstrait M_4, c'est-à-dire que ses composantes possèdent la propriété $V_j^* = V_j$ pour $j = 1, 2, 3$ et $V_4^* = -V_4$, où l'étoile désigne le conjugué hermitien (ou, de façon plus générale, l'opérateur adjoint), les V_μ étant, dans le cas le plus général, considérés comme opérateurs dans un certain espace. Cette propriété exprime le caractère « réel et imaginaire » des vecteurs V de l'espace abstrait M_4. Supposons que ces vecteurs soient représentés sous la forme bilinéaire spinorielle suivante :

$$V_\mu = \mathrm{i}\bar{\psi}\gamma_\mu\psi = \mathrm{i}\psi^*\gamma_4\gamma_\mu\psi$$

où les γ_μ sont les matrices de Dirac.

Il y a une infinité de choix possibles d'une telle « représentation », aucun n'étant canonique ; nous en supposerons par la suite un fixé. Soit une matrice $a \in \mathrm{GL}(4, \mathbf{C})$, agissant sur l'espace des spineurs S_4^*. Elle définit sur l'espace M_4 une transformation $V \rightsquigarrow A(V) = (A(V_\mu))$, car il est clair que

$$(A(V_j))^* = (\mathrm{i}(a\psi)^*\gamma_4\gamma_j(a\psi))^* = A(V_j)$$

$$(A(V_4))^* = (\mathrm{i}(a\psi)^*\gamma_4\gamma_4(a\psi))^* = -A(V_4)\,,$$

donc que le caractère réel et imaginaire des vecteurs de M_4 est conservé. Cette transformation dépend du choix (arbitraire) de la « description » spinorielle que l'on a fait, et, pour un choix donné, n'est en général pas linéaire. De plus, le produit de deux telles transformations n'est en général pas défini, eu égard à l'arbitraire du choix de la « section » représentant les V_μ. Par contre, si l'on a pu choisir une « bonne description spinorielle » des V_μ, les transformations appartenant à un sous-groupe convenable de $\mathrm{GL}(4, \mathbf{C})$ pourront définir un groupe de transformations (qui ne seront *a priori* pas linéaires) de M_4. Ce devra en particulier être le cas du groupe conforme, dont nous connaissons (cf. appendice) une réalisation comme transformations, non linéaires pour une partie d'entre elles, de l'espace de Minkowski (dans l'appendice, nous avons écrit ces transformations dans l'espace de Minkowski réel, mais le traitement est tout à fait similaire dans l'espace « réel et imaginaire »). Cette interprétation du groupe $\mathrm{GL}(4, \mathbf{C})$ et de ses sous-groupes nous incite donc à chercher la symétrie interne parmi les sous-groupes de $\mathrm{GL}(4, \mathbf{C})$, et plus particulièrement (pour pouvoir y définir d'une façon qui ne soit pas par trop abstraite les opérations P, C, T) ceux contenant $\mathbf{L}$. Nous allons maintenant préciser, par une étude algébrique, ces indications sur la direction dans laquelle il convient de chercher la symétrie forte.

APPENDICE AU CHAPITRE I

A) LE GROUPE DE LORENTZ

Considérons l'espace de Minkowski « réel », soit l'espace réel à 4 dimensions $\mathbf{R}^4$ muni de la métrique hyperbolique $g^{\mu\nu}\, x_\mu\, x_\nu$. On appelle groupe de Lorentz général le groupe O(3, 1) des transformations linéaires de $\mathbf{R}^4$ laissant invariante la forme $g^{\mu\nu}\, x_\mu\, x_\nu (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4)$. Chaque élément $g \in \mathrm{O}(3, 1)$ peut donc être réalisé comme une matrice carrée d'ordre 4, à coefficients réels, $g = (g_{\rho\sigma})$ $(\rho, \sigma = 1, ..., 4)$, telle que, I_{31} désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix}$, on ait la relation : $\tilde{g}\, I_{31}\, g = I_{31} (= g I_{31}\, \tilde{g})$, où $\tilde{g}$ désigne la transposée de g (cf. par exemple ([8])).

Si maintenant nous considérons l'espace de Minkowski « réel et imaginaire » $\mathbf{R}_x^3 + \mathrm{i}\mathbf{R}_t$, muni de la métrique $x^2 + (\mathrm{i}t)^2$, on peut réaliser le groupe O(3, 1) avec des matrices carrées d'ordre 4, $\gamma = (\gamma_{\rho\sigma})$, telles que γ_{jk} soit réel $(j, k = 1, 2, 3)$, γ_{k4} et γ_{4k} imaginaires purs, et γ_{44} réel. En effet, la correspondance $g \rightsquigarrow \varphi(g) = \gamma$ définie par

$$\gamma_{jk} = g_{jk},\ \gamma_{k4} = \mathrm{i}g_{k4},\ \gamma_{4k} = -\,\mathrm{i}g_{4k} \text{ et } \gamma_{44} = g_{44} = \mathrm{i}(-\,\mathrm{i})\, g_{44}$$

est un isomorphisme entre les deux groupes de matrices considérés, les matrices γ de la deuxième réalisation de O(3, 1) vérifiant (par définition) la condition $\gamma^*\, I_{31}\, \gamma = I_{31}$ (où $\gamma^* = \overline{\tilde{\gamma}}$). Sous cette dernière forme, on voit immédiatement l'inclusion $\mathrm{O}(3, 1) \subset \mathrm{U}(3, 1)$, où U(3, 1) est le groupe des transformations linéaires de l'espace complexe à quatre dimensions $\mathbf{C}^4$ laissant invariante la forme d'Hermite $z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 - z_4 \bar{z}_4$, ainsi que l'inclusion $\mathrm{O}(3, 1) \subset \mathrm{O}(4, \mathbf{C})$ dans le groupe des matrices complexes orthogonales d'ordre 4, puisque $\tilde{\gamma} = \gamma^{-1}$.

Le groupe de Lorentz général, ou O(3, 1), est un groupe de Lie, mais il n'est pas connexe. Plus précisément, il se compose de quatre composante s connexes. La relation de définition de ce groupe (dans l'une ou l'autre réalisation) implique en effet que $\det g = \det \gamma = \pm 1$ et que $|\, g_{44}\, | \geqslant 1$. Nous désignerons par SO(3, 1) le sous-groupe normal de O(3, 1) formé des matrices de déterminant 1 (c'est le groupe spécial correspondant) ; ce groupe possède deux composantes connexes, $\mathrm{SO}_0(3, 1)$ où $g_{44} \geqslant 1$, et l'ensemble des matrices telles que $g_{44} \leqslant -1$. La composante connexe de l'unité de SO(3, 1) et de O(3, 1), soit $\mathrm{SO}_0(3, 1)$ (qui est évidemment un

sous-groupe normal) s'appelle groupe de Lorentz propre **L**. Le sous-groupe de O(3, 1) formé des matrices pour lesquelles $g_{44} \geqslant 1$ (et de déterminant ± 1) s'appelle groupe de Lorentz complet, ou orthochrone (les transformations de ce groupe sont les seules, dans O(3, 1), à transformer tout vecteur positif du genre temps, soit un vecteur $(x_1, ..., x_4)$ tel que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 < 0 \quad \text{et} \quad x_4 > 0 ,$$

en un vecteur du même type).

Le groupe **L** est connexe mais non simplement connexe ; son recouvrement universel est le groupe SL (2, **C**), groupe unimodulaire complexe en deux dimensions. **L** est isomorphe au groupe SO(3, **C**), des matrices complexes orthogonales d'ordre 3 à déterminant unité.

Tous ces groupes, localement isomorphes, ont des algèbres de Lie isomorphes. On voit aisément (cf. par exemple ([8])) qu'on a une base de l'algèbre de Lie de **L**, soit $\mathfrak{so}(3, 1) \approx \mathfrak{L}$, avec six opérateurs (a_k, b_k) $(k = 1, 2, 3)$ vérifiant les relations de commutations :

$$[a_i, a_j] = \varepsilon_{ijk}\, a_k ; \quad [a_i, b_j] = \varepsilon_{ijk}\, b_k ; \quad [b_i, b_j] = -\varepsilon_{ijk}\, a_k .$$

En posant

$$M_{ij} = \varepsilon_{ijk}\, a_k \quad \text{et} \quad M_{k4} = b_k ,$$

on retrouve les relations de commutation classiques que l'on peut résumer sous la forme

$$[M_{\mu\nu}, M_{\nu\sigma}] = -\, g_{\nu\nu}\, M_{\mu\sigma}$$

(où l'on ne fait pas de sommation sur ν ; on a pris $g_{ik} = \delta_{ik}$ et $g_{4\mu} = -\,\delta_{4\mu}$). Ici, on a pris le corps de base de l'algèbre comme étant **R**. Si on l'étend à **C**, les nombres complexes, on pourra considérer les combinaisons

$$2\, J_k^+ = a_k + \mathrm{i} b_k \quad \text{et} \quad 2\, J_k^- = a_k - \mathrm{i} b_k ,$$

et les relations de commutation deviennent

$$[J_i^\pm, J_j^\pm] = \varepsilon_{ijk}\, J_k^\pm \quad \text{et} \quad [J_i^\pm, J_j^\mp] = 0 ;$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{L}_{(\mathbf{C})}$ est isomorphe à $(\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3))_{(\mathbf{C})}$, où $\mathfrak{so}(3)$ désigne l'algèbre de Lie (sur **R**) du groupe des rotations en trois dimensions SO(3).

Notons $\{f(h)\}$ l'espace des fonctions continues, à valeurs complexes, définies sur le groupe **L**. On pourra définir des représentations linéaires de **L** à l'aide d'opérateurs linéaires T_g opérant sur l'espace $\{f(h)\}$ de la façon suivante : $(T_g f)(h) = f(g^{-1} h)$; on peut aussi considérer les opérateurs opérant « à droite » : $(T_g f)(h) = f(hg)$. Il est immédiat que, dans l'un ou l'autre cas, la correspondance $g \rightsquigarrow T_g (g \in \mathbf{L})$ est une représentation. En effet, on a :

$$(T_{g_1} T_{g_2} f)(h) = (T_{g_1}(T_{g_2} f))(h) = (T_{g_2} f)(hg_1) = f(hg_1 g_2) = (T_{g_1 g_2} f)(h)$$

et de même (en opérant à gauche) :

$$(T_{g_1} T_{g_2} f)(h) = (T_{g_2} f)(g_1^{-1} h) = f(g_2^{-1} g_1^{-1} h) = (T_{g_1 g_2} f)(h) .$$

Les représentations considérées sont évidemment continues. Plus généralement (cf. Bourbaki, Intégration, chapitre VIII, par. 2, n° 3) supposons que le groupe $\mathbf{L}$ opère continûment à gauche sur un espace localement compact X (par exemple, $\mathbf{L}$ lui-même), et supposons défini un *multiplicateur*, fonction (complexe) continue χ sur $\mathbf{L} \times X$ telle que

$$\chi(I, x) = 1 \quad \text{et} \quad \chi(gh, x) = \chi(g, hx)\, \chi(h, x)$$

pour tout $g, h \in \mathbf{L}$ et $x \in X$ (I désignant l'identité de $\mathbf{L}$).

Alors la correspondance $g \rightsquigarrow T_g \in \mathscr{L}(\mathscr{C}(X), \mathscr{C}(X))$ [espace des applications linéaires continues de $\mathscr{C}(X)$ dans lui-même, $\mathscr{C}(X)$ désignant l'espace des fonctions continues sur X à valeurs complexes, ou, plus généralement, à valeurs dans un certain espace vectoriel topologique complexe], définie par :

$$(T_g f)(x) = \chi(g^{-1}, x) f(g^{-1} x)$$

est une représentation linéaire continue de $\mathbf{L}$ dans $\mathscr{C}(X)$.

De même, si $\mathbf{L}$ opère à droite et si on a un « multiplicateur à droite » χ, c'est-à-dire une fonction $\chi(x, g)$ sur $X \times \mathbf{L}$ telle que $\chi(x, gh) = \chi(x, g)\, \chi(xg, h)$, on pourra définir la représentation $g \rightsquigarrow T_g$ par

$$(T_g f)(x) = \chi(x, g) f(xg) .$$

D'une façon analogue, à l'aide de multiplicateurs un peu plus généraux, on obtiendra des « ray-representations » (telles que $T_{g_1} T_{g_2} = e^{i\theta(g_1, g_2)} T_{g_1} T_{g_2}$, avec $\theta : G \times G \to \mathbf{R}$, où G est un groupe localement compact opérant sur X). Considérons maintenant le groupe « bilatère » $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$. Comme dans ([6]), on obtiendra des représentations dans l'espace $\mathscr{C}(\mathbf{L}) = \{f(h)\}$ de la forme $(g, g') \rightsquigarrow T_{(g, g')}$ où $(T_{(g, g')} f)(h) = f(g^{-1} h g')$, où $(g, g') \in \mathbf{L} \times \mathbf{L}$, la loi de multiplication étant évidemment

$$(g_1, g_1')(g_2, g_2') = (g_1 g_2, g_1' g_2') .$$

Nous pouvons généraliser cette démarche à un produit $G \times G'$ de deux groupes localement compacts. Supposons que G opère continûment à gauche sur un espace localement compact X, que G' opère continûment à droite sur X, et que ces opérations se font de manière associative, c'est-à-dire que $(gx)\, g' = g(xg')$ pour tous $g \in G$, $x \in X$, $g' \in G'$.

Nous supposerons de plus défini sur le produit $G \times X \times G'$, un « *bimultiplicateur* », soit une fonction continue à valeurs complexes χ telle que $\chi(I, x, I') = 1$ pour tout $x \in X$ (I' désignant l'identité de G', et I celle de G) et que $\chi(gh, x, g'h') = \chi(g, hxg', h')\, \chi(h, x, g')$, $\forall g, h \in G$; $g', h' \in G'$;

$x \in X$. Alors l'application $(g, g') \rightsquigarrow T_{(g,g')}$ de $G \times G'$ dans $\mathscr{L}(\mathscr{C}(X), \mathscr{C}(X))$ définie par

$$(T_{(g,\,g')} f)(x) = \chi(g^{-1}, x, g') f(g^{-1} x g')$$

est une représentation continue de $G \times G'$ dans l'espace $\mathscr{C}(X)$ des fonctions continues sur X (à valeurs dans un certain espace vectoriel topologique complexe, dans le cas le plus général). On retrouve évidemment sur $G \times I'$ (respectivement $I \times G'$) la représentation « à gauche » (resp. « à droite ») précédemment définie (I et I' désignant les identités de G et G'). D'une façon analogue, on obtiendra des « ray-representations » (représentations à un facteur de phase près).

Si un sous-espace E de $\mathscr{C}(X)$ est invariant sous l'ensemble des T_g, $g \in G$ (resp. des $T_{(g,g')}$, $(g,g') \in G \times G'$), on aura une représentation de G (resp $G' \times G$) dans E. Si en particulier on a un sous-espace invariant de dimension finie, pour lequel on peut choisir une base $\{f_p(x)\}$, on aura :

$$T_g f_p(x) = f_p(gx) = \sum_q a_{pq} f_q(x) ,$$

puisque la fonction $T_g f$ est aussi dans E. L'application $g \rightsquigarrow (a_{pq}(g))$ est ainsi une représentation de dimension finie de G (ceci peut d'ailleurs s'étendre au cas où E est un espace de Hilbert à base dénombrable). Nous nous intéressons plus particulièrement aux sous-espaces invariants pour lesquels la représentation obtenue est irréductible.

Considérons le groupe $\mathbf{L}$. On sait qu'il existe un homomorphisme $a \rightsquigarrow g$ de SL(2, $\mathbf{C}$) sur $\mathbf{L}$, de noyau

$$\mathbf{Z}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} ;$$

on en a donné une forme explicite au chapitre I, 5°, (on utilise la réalisation réelle de $\mathbf{L}$ en quatre dimensions). On obtiendra les représentations spinorielles D_{mn} de $\mathbf{L}$ (les seules irréductibles en dimension finie) en considérant les représentations de SL(2, $\mathbf{C}$) [pour lesquelles $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ et $-a$ ont même image, dans le cas des représentations univaluées de $\mathbf{L}$] dans l'espace R_{mn} formé de polynômes homogènes $p(z, \bar{z})$ de degrés $2m$ en z et $2n$ en $\bar{z}$ (m et n entiers ou demi-entiers), qui est un sous-espace de dimension $(2m + 1)(2n + 1)$ de $\mathscr{C}(\mathbf{C})$, et en définissant :

$$T_a p(z, \bar{z}) = (\beta z + \delta)^{2m} \overline{(\beta z + \delta)}^{2n} p\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}, \frac{\bar{\alpha}\bar{z} + \bar{\gamma}}{\bar{\beta}\bar{z} + \bar{\delta}} \right).$$

Nous pouvons obtenir ces représentations d'une autre manière, à l'aide de l'isomorphisme entre $\mathbf{L}$ et SO(3, $\mathbf{C}$). Réalisant ainsi $\mathbf{L}$ comme SO(3, $\mathbf{C}$),

nous le paramétriserons à l'aide de 3 angles d'Euler complexes $\omega^+ = (\theta^+, \varphi^+, \psi^+)$, dont nous désignerons les conjugués par $\omega^- = (\theta^-, \varphi^-, \psi^-)$. Procédant de façon analogue au traitement des représentations spinorielles du groupe des rotations SO(3) (grâce au fait que $\mathfrak{L}_{(\mathbf{C})} \approx (\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3))_{(\mathbf{C})}$), nous considérerons les fonctions sphériques de base

$$y_{mn}^{pp'}(\omega^+, \omega^-) = y_m^p(\theta^+, \varphi^+)\, y_n^{p'}(\theta^-, \varphi^-)\,,$$

où m et n sont fixés, p variant de $-m$ à $+m$ (avec des sauts de 1) de p' de $-n$ à $+n$. Nous avons alors

$$T_g\, y_{mn}^{pp'} = \sum_{q,q'} y_{mn}^{qq'}\, Y_{mn}^{pq,p'q'}(g)\,,$$

pour tout $g \in \mathbf{L} = \mathrm{SO}(3, \mathbf{C})$, et obtiendrons ainsi la représentation

$$g \rightsquigarrow D_{mn}(g) = (Y_{mn}^{pq,p'q'}(g))$$

où l'expression de

$$Y_{mn}^{pq,p'q'}(g)$$

en fonction des paramètres (ω^+, ω^-) déterminant g est la suivante (cf. ([6])) :

$$Y_{mn}^{pq,p'q'}(\omega^+, \omega^-) = Y_m^{pq}(\omega^+)\, Y_n^{p'q'}(\omega^-)\,,$$

avec

$$Y_m^{pq}(\omega^+) \sim \left(\sin\frac{1}{2}\theta^+\right)^{-p+q}\left(\cos\frac{1}{2}\theta^+\right)^{-p-q} e^{i(p\varphi^+ + q\psi^+)}\, \frac{d^{m-p}}{d(\sin^2\frac{1}{2}\theta^+)^{m-p}}$$
$$\left[\left(\sin\frac{1}{2}\theta^+\right)^{2m-2q}\left(\cos\frac{1}{2}\theta^+\right)^{2m+2p}\right]$$

et de même pour $Y_n^{p'q'}(\omega^-)$. La matrice $D_{mn}(g)$ obtenue est évidemment d'ordre $(2m+1)(2n+1)$. Nous obtenons de cette façon (à une équivalence près) toutes les représentations spinorielles de $\mathbf{L}$. De plus, de par leur origine, nous voyons que les nombres « magnétiques » p et p' sont les poids associés à la représentation D_{mn}.

Dans le cas du groupe bilatère $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, en prenant comme fonctions de base les fonctions

$$Y_{mn}^{pq,p'q'}(\omega^+, \omega^-)\,,$$

au nombre de $(2m+1)^2(2n+1)^2$, nous obtiendrons la « partie centrale » $D_{mn} \otimes D_{mn}$ des représentations spinorielles, à l'aide du procédé décrit plus haut ; nous aurons en effet :

$$T_{(g,g')}\, Y_{mn}^{pq,p'q'}(h) = D_{mn}^{pq,p'q'}(g^{-1}hg') = D_{mn}^{pr,p'r'}(g^{-1})\, D_{mn}^{rs,r's'}(h)\, D_{mn}^{sq,s'q'}(g')\,,$$

d'où

$$T_{(g,g')} = (D_{mn}^{rp,r'p'}(g)\, D_{mn}^{sq,s'q'}(g'))$$

puisque $g^{-1} = \tilde{g}$ car $g \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{C})$. Les poids correspondant à ces représentations spinorielles seront ici les « nombres magnétiques p, q, p', q'. On obtiendrait les représentations spinorielles les plus générales $D_{mn} \otimes D_{m'n'}$ du groupe $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ à l'aide du procédé général, avec des produits des fonctions sphériques y comme fonctions de base.

L'algèbre de Lie £ est simple (sur $\mathbf{R}$ — semi-simple sur $\mathbf{C}$ —) et de rang 2. On détermine donc (à une équivalence près) les représentations irréductibles de £ (et celles de $\mathbf{L}$) par les valeurs de deux nombres quantiques ; comme £ est d'ordre 6, on caractérise complètement les coefficients des représentations par les valeurs (distinctes) sur le premier et le deuxième groupes de paramètres, de $\frac{1}{2}(6 - 2) = 2$ opérateurs (soit par 2 « nombres quantiques supplémentaires »). Comme $£ \approx \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, on n'a pas ici à distinguer entre représentations univaluées et bivaluées, mais on pourra distinguer entre représentations réelles (à coefficients réels) et complexes. Toute représentation irréductible complexe de l'algèbre de Lie (sur $\mathbf{R}$) £, non équivalente (par une transformation réelle) à une représentation réelle, fournit une représentation réelle, irréductible par des transformations réelles, de dimension double : prenons par exemple £ comme la complexification $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \otimes \mathbf{C}$ (soit extension du corps des scalaires à $\mathbf{C}$, et restriction à $\mathbf{R}$, ce qui double le nombre de générateurs) de l'algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ du groupe unimodulaire réel en deux dimensions. Ainsi, en désignant par D une représentation propre (de dimension 2) de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, par I_2 la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et par J_2 la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$, on aura la représentation quadridimensionnelle réelle que nous noterons $D \otimes I_2 + D \otimes J_2$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, dans laquelle $u \rightsquigarrow D(u) \otimes I_2$ et $iu \rightsquigarrow D(u) \otimes J_2$ si $u \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$; cette représentation, irréductible par des transformations réelles, n'est pas équivalente à la représentation propre, que nous noterons D_N, de £ comme $\mathfrak{so}(3, 1)$; on peut exprimer cette dernière dans la base $M_{\mu\nu}$ sous la forme :

$$M_{ij} \rightsquigarrow (E_{ji} - E_{ij}) \quad \text{et} \quad M_{k4} \rightsquigarrow (E_{k4} + E_{4k}),$$

les $E_{\mu\nu}$ étant les matrices de base de l'algèbre $\mathfrak{gl}(4)$ des matrices carrées d'ordre 4.

Si l'on applique la théorie des poids au diagramme $\mathfrak{d}_2 = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$, on obtient (cf. par exemple ([14])) que les dimensions des représentations irréductibles de l'algèbre complexe $£_{\mathbf{C}}$ sont $(2m + 1)(2n + 1)$ pour la représentation D_{mn} : $\overset{2m}{\circ}\ \overset{2n}{\circ}$ (m, n : demi-entiers ou entiers). En particulier, on voit que D_N a pour diagramme $\overset{1}{\circ}\ \overset{1}{\circ}$; c'est le produit tensoriel de la représentation de base $\overset{1}{\circ}\ \circ$ par sa contragrédiente. L'autre représentation réelle de £ en dimension 4 que nous avons décrite plus haut, correspond au diagramme

$\overset{1}{\circ\circ} \oplus \overset{1}{\circ\circ}$. La représentation £ comme $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$ correspond au diagramme $\overset{2}{\circ\circ}$, et la représentation adjointe à $\overset{2}{\circ\circ} \oplus \overset{2}{\circ\circ}$.

Avant de terminer, mentionnons que pour obtenir les représentations du groupe de Lorentz complet, il nous faut représenter **L** ainsi que la matrice $-I_{31}$; en effet, tout élément du groupe complet est de la forme $(-I_{31})^{\varepsilon}h$ où $h \in \mathbf{L}$. On trouvera dans ([8]) un traitement des représentations du groupe complet (de même que de celles du groupe de Lorentz propre, en dimension finie ou infinie). Nous avons explicité dans le premier chapitre un traitement possible des représentations finies du groupe complet.

B) LE GROUPE CONFORME

Ce groupe, introduit en physique par Cunningham et Bateman ([4]), puis étudié par maints auteurs (voir par exemple ([5]), ([7]), ([10]), ([11])), peut être défini dans l'espace de Minkowski (réel) par les transformations du groupe de Lorentz inhomogène, ou groupe de Poincaré, $x'_\mu = \Lambda^\nu_\mu x_\nu + b_\mu$ (où la matrice (Λ^ν_μ) appartient au groupe de Lorentz homogène), qui dépendent de 10 paramètres, et les transformations

$$x'_\mu = (1 + \lambda a^\rho x_\rho + \lambda^2 a^2 x^2)^{-1} (\lambda x_\mu + \lambda^2 a_\mu x^2)$$

où

$$x^2 = g^{\mu\nu} x_\mu x_\nu , \qquad a^2 = g^{\mu\nu} a_\mu a_\nu ,$$

qui dépendent de 5 paramètres (un pour la dilatation $x'_\mu = \lambda x_\mu$, et les quatre a_μ pour les « accélérations »). On peut considérer ce groupe comme engendré par le groupe de Poincaré **P** et la transformation particulière (« inversion »)

$$x'_\mu = -\frac{x_\mu}{x^2} .$$

En appliquant la méthode de Cartan, on trouve une représentation infinitésimale suivante, pour l'algèbre de Lie $\mathcal{S}$ du groupe conforme :

$M_{\mu\nu} = g_{\nu\rho} x^\rho \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - g_{\mu\rho} x^\rho \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$, qui est aussi représentation infinitésimale de l'algèbre de Lie £ (de Lorentz).

$p_\mu = \dfrac{\partial}{\partial x_\mu}$ (translations du groupe de Poincaré).

$A_\mu = x^2 \dfrac{\partial}{\partial x_\mu} - 2\, g_{\mu\nu} x^\nu x^\rho \dfrac{\partial}{\partial x_\rho}$ (accélérations).

$A_0 = x^\rho \dfrac{\partial}{\partial x_\rho}$ (dilatation).

On aura alors les relations de commutation suivantes (ici, on ne fait pas de convention de sommation sur les indices répétés, pour avoir des formules plus simples) :

$$[M_{\mu\nu}, M_{\nu\sigma}] = -g_{\nu\nu} M_{\mu\sigma} ; [M_{\mu\nu}, p_\mu] = g_{\mu\mu} p_\nu ; [p_\mu, p_\nu] = 0$$

$$[A_\mu, p_\nu] = -2 M_{\mu\nu} + 2 g_{\mu\nu} A_0 ; [M_{\mu\nu}, A_\mu] = g_{\mu\mu} A_\nu ; [A_\mu, A_\nu] = 0$$

$$[A_0, p_\mu] = -p_\mu ; [A_0, A_\mu] = A_\mu .$$

La première ligne fournit les relations de commutation de l'algèbre de Lie du groupe de Poincaré **P**.

L'algèbre de Lie obtenue est une forme réelle du type $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_3$, soit $\mathfrak{su}(2, 2) \approx \mathfrak{so}(4, 2)$, (on dénote par des lettres gothiques minuscules les algèbres de Lie, et par des romaines majuscules les groupes de Lie correspondants, sauf pour les plus usités, où les anglaises dénoteront les algèbres, et les romaines grasses majuscules les groupes). Le groupe conforme est ainsi localement isomorphe à SO(4, 2) (ce groupe a deux composantes connexes), qui est localement isomorphe au groupe SU(2, 2). Rappelons que SO(p, q) désigne le groupe linéaire spécial de la forme quadratique

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

(opérant dans un espace réel à $p + q$ dimensions) et que SU(p, q) désigne le groupe linéaire spécial de la forme d'Hermite

$$z_1 \bar{z}_1 + \cdots + z_p \bar{z}_p - z_{p+1} \bar{z}_{p+1} - \cdots - z_{p+q} \bar{z}_{p+q}$$

(opérant dans un espace complexe à $p + q$ dimensions) — cf. par exemple ([19]). Notons que le groupe $SO_0(p, q)$, qui est connexe et homéomorphe à $SO(p) \times SO(q) \times \mathbf{R}^d$ (pour un certain entier $d > 0$), n'est pas simplement connexe, non plus que le groupe SU(p, q) (contrairement à la forme compacte SU($p + q$)), lequel est homéomorphe à $SU(p) \times U(1) \times SU(q) \times \mathbf{R}^{d'}$, pour un certain entier $d' > 0$, espace dont le recouvrement universel est $SU(p) \times SU(q) \times \mathbf{R}^{d'+1}$ ($p \geqslant q > 0$).

Si l'on étudie les dimensions des représentations finies irréductibles de l'algèbre de Lie complexe $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{sl}(4)$, on trouve, d'après la formule de Weyl, que la représentation φ de diagramme $\overset{a_1}{\circ}\!\!-\!\!\overset{a_2}{\circ}\!\!-\!\!\overset{a_3}{\circ}$ est de dimension

$$\tfrac{1}{2}(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3)(2 + a_1 + a_2)(2 + a_2 + a_3) \times$$

$$\times (3 + a_1 + a_2 + a_3) = N(\varphi) ,$$

d'où le tableau :

a_1 a_2 a_3 ○—○—○			$N(\varphi)$
1	0	0	4*
0	1	0	6
1	1	0	10*
2	0	0	10*
1	0	1	15
0	2	0	20
3	0	0	20*
4	0	0	35*
2	0	1	36*
2	1	0	45*
0	3	0	50
5	0	0	56*
1	1	1	64
	etc		

L'astérisque indique qu'il y a aussi la représentation contragrédiente, de poids symétriques. Les représentations (100) et (010) sont les deux représentations de base, respectivement comme $\mathfrak{a}_3$ et comme $\mathfrak{d}_3$. La représentation (101) est l'adjointe ; elle peut se « factoriser » en $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, où φ_1 est la représentation (010) de $\mathfrak{a}_3$ et φ_2 la représentation (01000) de $\mathfrak{a}_5$ (on désigne par des lettres gothiques minuscules les algèbres de Lie, et par des majuscules ordinaires les groupes correspondants). De même, (210) se « factorise » à l'aide de la représentation (010... 0) de $\mathfrak{a}_9$ (cf. ([14])). Nous parlerons plus loin du problème des représentations infinies unitaires de SU(2, 2).

*

Remarque générale sur le premier chapitre.

Tout au long de ce chapitre, nous avons parlé d'opérations P, C, T « internes » (suggérées par la phénoménologie). En fait, nous sommes partis (par exemple dans le cas de $\mathscr{S}$) des définitions géométriques de P et T ; si bien que ces définitions sont également valables dans une symétrie unifiée (au sens du chapitre II). Qui plus est, *eu égard à la relation de Gell-Mann-Nishijima* (qui relie la charge à la symétrie interne), *le théorème de Lüders* (qui relie les opérations P et T « géométriques » à la conjugaison de charge C), dans la mesure où il est valable, *suggère l'existence d'un lien* (non trivial) *entre les symétries externe et interne au sein d'une symétrie unifiée*, où seraient définies les opérations P, C, et T comme nous venons de l'indiquer [avec éventuellement un choix de la phase plus général que celui fait en posant $PCT = 1$; auquel cas, comme nous l'avons déjà mentionné, notre traitement s'adapte sans difficulté]. Cela aussi nous amène au sujet du chapitre II.

CHAPITRE DEUXIÈME

LIEN ENTRE LES FORMALISMES INTERNE ET EXTERNE

Nous partons ici du principe qu'il doit exister, entre l'algèbre de Lie $\mathfrak{X}$ (à déterminer) du groupe d'invariance des interactions fortes, supposé exister (et être, en général, semi-simple), et l'algèbre de Lie $\mathscr{P}$ du groupe de Poincaré, un lien qui permette de relier l'invariant $-g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$ de $\mathscr{P}$ (le carré de la masse physique) aux nombres quantiques « internes » caractérisant (pour un spin et une parité, J^P, donnés), les particules élémentaires. Ce lien ne peut pas être la somme directe $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$, car sinon d'une part on ne peut expliquer l'assignation d'un « spin » J^P déterminé à chaque représentation du groupe « interne » (de classification), et d'autre part les particules classifiées dans une même représentation auraient la même masse (« dégénérée »). L'objet de ce chapitre sera donc de déterminer à quelles conditions ce lien peut ne pas être isomorphe à la somme directe, ce qui limitera les possibilités diverses du choix de $\mathfrak{X}$, et à quelles conditions ce lien n'est pas isomorphe à la somme directe. La première idée qui vient à l'esprit est d'étudier les extensions de $\mathfrak{X}$ par $\mathscr{P}$, ou de $\mathscr{P}$ par $\mathfrak{X}$. Ce sera l'objet essentiel de la première partie de ce chapitre.

A) THÉORIE DES EXTENSIONS D'ALGÈBRES DE LIE

1) **Définitions.** Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux algèbres de Lie sur un même corps commutatif K. On appelle *extension* de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$ une suite exacte :

$$0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{f} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b} \to 0$$

où $\mathfrak{f}$ est une algèbre de Lie sur K, μ un homomorphisme surjectif de $\mathfrak{f}$ sur $\mathfrak{b}$, λ un homomorphisme injectif de $\mathfrak{a}$ sur le noyau de μ, soit :

$$\ker \mu = \operatorname{Im} \lambda \approx \mathfrak{a} .$$

Deux extensions $\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{f} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda'} \mathfrak{f}' \xrightarrow{\mu'} \mathfrak{b}$ sont dites *équivalentes* s'il existe un homomorphisme (nécessairement bijectif) f de $\mathfrak{f}$ dans $\mathfrak{f}'$ tel que

$f' \circ \lambda = \lambda'$ et $\mu' \circ f = \mu$. On dit une extension *inessentielle*, ou produit *semi-direct*, et on notera $\mathfrak{f} = \mathfrak{b}.\mathfrak{a}$, s'il existe dans $\mathfrak{f}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\ker \mu$ qui soit une sous-algèbre ; on la dit *triviale* si c'est un idéal supplémentaire, et centrale si $\ker \mu$ est contenu dans le centre de $\mathfrak{f}$.

On peut aussi (cf. ([12]) pour l'équivalence de ces deux définitions) dire que l'on a un produit semi-direct s'il existe un homomorphisme (injectif) ν de $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{f}$ tel que $\mu \circ \nu$ soit l'identité sur $\mathfrak{b}$. Tout produit semi-direct est équivalent (donc en particulier isomorphe) à un produit semi-direct construit de façon canonique à l'aide d'un certain homomorphisme $\varphi : \mathfrak{b} \to \mathrm{Dér}(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{b}$ dans l'algèbre de Lie des dérivations de $\mathfrak{a}$ (algèbre des applications K-linéaires D de $\mathfrak{a}$ dans lui-même telles que

$$D[a_1, a_2] = [a_1, Da_2] + [Da_1, a_2], \quad \text{si} \quad a_1, a_2 \in \mathfrak{a}),$$

de la façon suivante : sur *l'espace vectoriel* produit $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ on définit le crochet par la relation :

$$[(a, b), (a', b')] = ([a, a'] + \varphi(b).a' - \varphi(b').a, [b, b']),$$

où $\varphi(b).a'$ désigne l'élément de $\mathfrak{a}$ obtenu par action de la dérivation $\varphi(b)$ (l'image de b par l'homomorphisme φ) sur $a' \in \mathfrak{a}$. Rappelons le résultat suivant :

PROPOSITION. *Toute extension par une algèbre* $\mathfrak{a}$ *semi-simple est équivalente à l'extension triviale. Toute extension d'une algèbre* $\mathfrak{b}$ *semi-simple est inessentielle.*

La première partie découle de Bourbaki ([12]) (§ 6, n° 1, cor. 1 de la prop. 1) ; en effet, dans une extension $\mathfrak{f}$ de $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$, $\lambda(\mathfrak{a})$ est un idéal de $\mathfrak{f}$, idéal semi-simple si $\mathfrak{a}$ l'est ; l'orthogonal de $\lambda(\mathfrak{a})$ par rapport à la forme de Killing de $\mathfrak{f}$ est dans ce dernier cas un idéal de $\mathfrak{f}$, sous-espace supplémentaire de l'idéal $\lambda(\mathfrak{a})$, dont il est le commutant dans $\mathfrak{f}$, et qui est donc isomorphe à $\mathfrak{b}$. D'où la première partie. La deuxième partie est le corollaire 3 du théorème de de Levi-Malcev ((([12]), § 6, n° 8). Rappelons ce dernier (cf. ([12]), et ([13]), tome III).

THÉORÈME (DE LEVI-MALCEV). *Soient* $\mathfrak{f}$ *une algèbre de Lie,* $\mathfrak{e}$ *son radical (plus grand idéal résoluble),* $\mathfrak{b}$ *son radical nilpotent* ($\mathfrak{b} = [\mathfrak{e}, \mathfrak{f}]$). *Il existe toujours une sous-algèbre* $\mathfrak{s}$ *supplémentaire de* $\mathfrak{e}$ *dans* $\mathfrak{f}$; *c'est une sous-algèbre semi-simple maximale, et toute autre sous-algèbre possédant cette propriété (elle s'appelle sous-algèbre de Levi) est transformée de* $\mathfrak{s}$ *par un automorphisme spécial (de la forme* $e^{ad n}$ *où* $n \in \mathfrak{b}$) ; *toute sous-algèbre semi-simple de* $\mathfrak{f}$ *est contenue dans une sous-algèbre de Levi, et se transforme en une sous-algèbre d'une sous-algèbre de Levi donnée* $\mathfrak{s}$ *par un automorphisme spécial ;* $\mathfrak{f}$ *est produit semi-direct* $\mathfrak{s}.\mathfrak{e}$.

Il résulte de la proposition ci-dessus que *toute extension de $\mathscr{P}$ par $\mathfrak{X}$ semi-simple est équivalente à l'extension triviale*. On obtient donc une algèbre isomorphe au produit direct $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$.

2° Etude de Dér ($\mathscr{P}$), algèbre de Lie des dérivations de $\mathscr{P}$. Pour étudier les extensions (inessentielles nécessairement) de $\mathfrak{X}$ semi-simple par $\mathscr{P}$, il nous faut d'abord connaître la structure de l'algèbre de Lie Dér ($\mathscr{P}$). On sait (cf. appendice) que $\mathscr{P} = \mathfrak{L}.\mathscr{P}_0$, produit semi-direct de $\mathfrak{L}$ et d'un idéal commutatif quadridimensionnel $\mathscr{P}_0$, défini par l'homomorphisme D_N :

$$\mathfrak{L} \to \text{Dér}\,(\mathscr{P}_0) = \mathfrak{gl}(4, \mathbf{R})\,,$$

où D_N est la « représentation de Naimark » de $\mathfrak{L}$ en dimension 4 (comme $\mathfrak{so}(3, 1)$), indiquée dans l'appendice du premier chapitre. Soit $p \in \mathscr{P}$; on peut l'écrire

$$p = l + p_0\,, \quad l \in \mathfrak{L}\,, \quad p_0 \in \mathscr{P}_0\,.$$

Soient $p_1 = l_1 + p_{01}$, $p_2 = l_2 + p_{02}$ deux éléments de $\mathscr{P}(p_{01}, p_{02} \in \mathscr{P}_0)$. On a

$$[p_1, p_2] = [l_1, l_2] + ([l_1, p_0] + p[_{01}, l_2])$$

où l'expression entre parenthèses appartient à $\mathscr{P}_0$. Dans ce paragraphe, si on décompose $p \in \mathscr{P}$ en $l + p_0$, on notera $l = L(p)$ et $p_0 = T(p)$ (partie « lorentzienne » et partie « translations » de p).
Soient

$$D \in \text{Dér}\,(\mathscr{P}) \quad \text{et} \quad p = l + p_0 \in \mathscr{P}\,.$$

Ecrivons

$$Dp = dp + \Delta p + ap + Ap$$

où d, Δ, a, A sont des applications linéaires $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$ telles que :

$$d : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}\,, \quad \mathscr{P}_0 \to 0\,; \Delta : \mathfrak{L} \to 0\,, \mathscr{P}_0 \to \mathfrak{L}$$

$$a : \mathfrak{L} \to \mathscr{P}_0\,, \mathscr{P}_0 \to 0\,; A : \mathfrak{L} \to 0\,, \mathscr{P}_0 \to \mathscr{P}_0\,,$$

soit

$$dp = L(dl)\,, \quad \Delta p = L(Dp_0)\,, \quad ap = T(Dl)\,, \quad Ap = T(Dp_0)\,.$$

On sait ([12], § 5, n° 5, prop. 6) que toute dérivation d'une algèbre de Lie applique son radical dans son plus grand idéal nilpotent. Or le radical de $\mathscr{P}$ est $\mathscr{P}_0$, et comme $[\mathscr{P}, \mathscr{P}_0] = \mathscr{P}_0$, $\mathscr{P}_0$ est aussi le radical nilpotent, et par conséquent également le plus grand idéal nilpotent (compris entre le radical et le radical nilpotent). Donc $\Delta = 0$. On peut retrouver ce résultat directement. Soient en effet $p = l + p_0$, $p' = l' + p'_0$ deux éléments de $\mathscr{P}$. D étant une dérivation, on aura :

$$(*)\quad \begin{cases} d[p, p'] = L(D[l, l']) = [l, dp'] + [dp, l'] \\ a[p, p'] = T(D[l, l']) = [ap, l'] + [l, ap'] \\ \Delta[p, p'] = L(D[l, p'_0] + D[p_0, l']) = [l, \Delta p'] + [\Delta p, l'] \\ A[p, p'] = T(D[l, p'_0] + D[p_0, l']) = \\ \qquad = [l, Ap'] + [Ap, l'] + [dp, p'_0] + [p_0, dp'] . \end{cases}$$

Or $[p_0, p'_0] = 0$;

donc

$$D[p_0, p'_0] = [p_0, Dp'_0] + [Dp_0, p'_0] = 0 .$$

Donc

$$[p_0, \Delta p'] + [\Delta p, p'_0] = 0 , \qquad \forall p, p' \in \mathscr{P}$$

(en ajoutant donc $[p_0, \Delta p'] + [\Delta p, p'_0]$ à la somme des 2e membres des égalités (*), on retrouve bien que $d + a + \Delta + A$ est la dérivation D, agissant sur $[p, p']$), on en déduit donc :
$\Delta[p, p'] = [p, \Delta p'] + [\Delta p, p']$, soit $\Delta \in \text{Dér}(\mathscr{P})$. Or on a (cf. appendice) $[a_k, p_4] = 0$ $(k = 1, 2, 3)$, et $\Delta a_k = 0 = \Delta b_k$. Donc $[a_k, \Delta p_4] = 0$ $\forall k$, et par conséquent $\Delta p_4 = 0$. De plus, $[b_k, p_4] = p_k$, donc $\Delta p_k = 0$ pour tout k. D'où $\Delta = 0$, et $D = d + a + A$.

De plus, $ap \in \mathscr{P}_0$, donc $a[p, p'] = [ap, p'] + [p, ap']$, d'où $a \in \text{Dér}(\mathscr{P})$, et par conséquent $d + A \in \text{Dér}(\mathscr{P})$.

Or la restriction de la dérivation $d + A$ de $\mathscr{P}$ à £ est aussi une dérivation de £, et cette restriction est exactement d. £ étant semi-simple, toute dérivation est intérieure ([12], § 6, n° 2, cor. 3 de la prop. 1). Il existe donc un élément $\theta \in$ £ tel que $d = ad_{£}\,\theta$. Mais la dérivation $ad\,\theta = ad_{\mathscr{P}}\,\theta$ est une dérivation (intérieure) de $\mathscr{P}$, et elle coïncide avec d sur £. Posons donc $A' = d + A - ad\theta$. On a également $A' \in \text{Dér}(\mathscr{P})$, et de plus $A' : £ \to 0$, $\mathscr{P}_0 \to \mathscr{P}_0$.

On a ainsi décomposé la dérivation D en une somme de 3 dérivations :

$$D = a(D) + A'(D) \quad + ad\theta(D)$$

avec $\theta(D) \in$ £ ; on a explicité le fait que a et A', ainsi que θ, dépendent de D. Soient alors D_1 et D_2 deux dérivations de $\mathscr{P}$. On a $\forall p \in \mathscr{P}$:

$$[D_1, D_2]\, p = D_1\, D_2\, p - D_2\, D_1\, p = (a_1 + A'_1 + ad\theta_1)\,(a_2 + A'_2 + ad\theta_2)\, p -$$
$$- (a_2 + A'_2 + ad\theta_2)\,(a_1 + A'_1 + ad\theta_1)\, p .$$

Or

$$a_1\, a_2 = 0 = a_2\, a_1 , \quad a_1\, A'_2 = 0 = a_2\, A'_1 , \quad \text{et} \quad [a, ad\theta] = ad(a\theta)$$

car $a \in \text{Dér}(\mathscr{P})$ (ceci découle de l'identité de Jacobi ; cf. ([12]), § 1, n° 2, prop. 1). De plus, $ad\theta : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$, $\mathscr{P}_0 \to \mathscr{P}_0$. Donc

$$a([D_1, D_2]) = [a_1, D_2] + [D_1, a_2] .$$

Ainsi l'application $a : D \to a(D)$ est une dérivation de Dér $(\mathscr{P})$, c'est-à-dire $a \in \text{Dér}(\text{Dér}(\mathscr{P})) = \text{Dér}(\mathscr{P})$. En outre,

$$(ad\theta + A')([D_1, D_2]) = [ad\theta_1 + A'_1,\ ad\theta_2 + A'_2]$$

si l'on note

$$a_j, \theta_j, A'_j \quad \text{pour} \quad a(D_j), \theta(D_j), A'(D_j) \qquad (j = 1, 2) .$$

Donc l'application $D \rightsquigarrow ad\theta(D) + A'(D)$ est un homomorphisme de Dér $(\mathscr{P})$ dans lui-même.

On a $[a_k, p_4] = 0$, d'où $[a_k, A'\, p_4] = 0$ pour $A' = A'(D)$, $\forall k = 1, 2, 3$. D'où $A'\, p_4 = \alpha p_4$ où $\alpha = \alpha(D) \in \mathbf{R}$, puisque $A'\, p_4 \in \mathscr{P}_0$ nécessairement. Or $[b_k, p_4] = p_k$, et $(A'\, a_k = 0 = A'\, b_k)$. Donc $A'\, p_k = \alpha p_k$, avec le même $\alpha \in \mathbf{R}$. Donc

$$A'\, p = \alpha p_0 \quad \text{si} \quad p = l + p_0 .$$

De plus,

$$[ad\theta(D_1), ad\theta(D_2)] = ad[\theta(D_1), \theta(D_2)] ;$$

or il est clair que

$$A'([D_1, D_2])\, p = (A'_1\, A'_2 - A'_2\, A'_1)\, p = (\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_2 \alpha_1)\, p_0 = 0 =$$

$$= [A'(D_1), A'(D_2)] .$$

Donc

$$ad\theta([D_1, D_2]) = ad[\theta(D_1), \theta(D_2)] + [A'_1, ad\theta_2] + [ad\theta_1, A'_2] .$$

Or $A'(D)$ est une dérivation, et pour toute dérivation de D et pour tout $p \in \mathscr{P}$, on a $[D, adp] = ad(Dp)$. Mais $A'_1\, \theta_2 = 0 = A'_2\, \theta_1$, car $\theta \in \mathfrak{L}$. Donc l'application $D \rightsquigarrow \theta(D)$ est un homomorphisme de Dér $(\mathscr{P})$ dans $\mathfrak{L}$.
Ecrivons alors

$$a.a_k = \sum_{\mu=1}^{4} \alpha_k^\mu\, p_\mu,\ a.b_k = \sum_\mu \beta_k^\mu\, p_\mu \qquad (k = 1, 2, 3) .$$

$[a_k, b_k] = 0$, donc $\forall k = 1, 2, 3$:

$$a[a_k, b_k] = 0 = \sum_\mu [a_k, \beta_k^\mu\, p_\mu] + \sum_\mu [\alpha_k^\mu\, p_\mu, b_k] .$$

En tenant compte des relations de commutation de $\mathscr{P}$, et en prenant pour (i, j, k) une permutation cyclique de (1, 2, 3), il vient :

$$0 = \beta_k^i\, p_i - \beta_k^j\, p_j - \alpha_k^k\, p_4 - \alpha_k^4\, p_k$$

(sans sommation sur i ou j).

Il en résulte que l'on doit avoir

$$\beta_k^i = \beta_k^j = 0 \quad \text{et} \quad \alpha_k^4 = \alpha_k^k = 0 .$$

Or $[a_i, a_j] = a_k$, $[a_i, b_j] = b_k$ (i, j, k cycliques).
D'où

$$a.a_k = \alpha_k^i p_i + \alpha_k^j p_j = [\alpha_i^j p_j + \alpha_i^k p_k, a_j] + [a_i, \alpha_j^k p_k + \alpha_j^i p_i] =$$
$$= - \alpha_i^k p_i - \alpha_j^k p_j$$

et la matrice (α_k^i) est donc antisymétrique.

De plus,

$$a.b_k = \beta_k^k p_k + \beta_k^4 p_4 = [\alpha_i^j p_j + \alpha_i^k p_k, b_j] + [a_i, \beta_j^j p_j + \beta_j^4 p_4]$$
$$= - \alpha_i^j p_4 + \beta_j^j p_k .$$

D'où

$$\beta_j^j = \beta_k^k = \beta_i^i = \beta , \quad \text{et} \quad \beta_k^4 = \alpha_j^i .$$

Considérons alors l'élément

$$\alpha_2^3 p_1 + \alpha_3^1 p_2 + \alpha_1^2 p_3 - \beta p_4 = p_0(D) \in \mathscr{P}_0 .$$

On a

$$[p_0(D), a_k] = [\alpha_j^k p_i + \alpha_k^i p_j, a_k] = - \alpha_j^k p_j + \alpha_k^i p_i = a.a_k$$

$$[p_0(D), b_k] = [\alpha_i^j p_k + \beta p_4, b_k] = - \alpha_i^j p_4 + \beta p_k = a.b_k .$$

Donc $a(D) = ad p_0(D)$, car $a.\mathscr{P}_0 = 0$.

D'où

$$Dp = [\theta(D) + p_0(D), p] + \alpha p_0 , \quad \text{où} \quad \alpha = \alpha(D) \in \mathbf{R} .$$

Notons π la dérivation $p = l + p \to p_0$ de $\mathscr{P}$, c'est-à-dire la projection sur le radical $\mathscr{P}_0$. Toute dérivation $D \in \text{Dér}\,(\mathscr{P})$ peut alors s'écrire :

$$\underline{D = ad(\theta(D) + p_0(D)) + \alpha(D)\,\pi .}$$

De plus, il est clair que si $D_1, D_2 \in \text{Dér}\,(\mathscr{P})$, $\alpha([D_1, D_2]) = 0$, et en outre :

$$\theta([D_1, D_2]) = [\theta(D_1), \theta(D_2)]$$

$$p_0([D_1, D_2]) = D_1\, p_0(D_2) - D_2\, p_0(D_1) .$$

La dernière égalité résulte de la relation $[D, adp] = ad(Dp)$ et du fait que, le centre de $\mathscr{P}$ étant nul, l'application adjointe est un isomorphisme. Elle est équivalente au fait que l'application $D \rightsquigarrow adp_0(D)$ est une dérivation de Dér $(\mathscr{P})$.

Remarque. Si on considère l'algèbre de Lie $\mathscr{P}$, non plus sur **R** comme on l'obtient à partir du groupe de Poincaré, mais sur un quelconque corps commutatif de caractéristique nulle K, ce qui est possible car les constantes de structure relatives à la base $(a_k, b_k ; p_k, p_4)$ sont ± 1 ou 0, l'étude faite précédemment subsiste, en prenant cette fois-ci la combinaison des p_μ définissant $p_0(D)$ à coefficients dans K, et $\alpha(D) \in K$.

3. Expressions de Dér ($\mathscr{P}$) comme produit semi-direct. Si $p = l + p_0$, on a $[\pi, adp] = ad\pi p = adp_0$. Notons donc $\widetilde{\mathscr{P}}_0$ l'algèbre de Lie engendrée par $\mathscr{P}_0$ et par un générateur π', les relations de commutation étant définies par $[\pi', p_0] = p_0$. Cette algèbre est résoluble (mais non pas nilpotente), et son algèbre dérivée $[\widetilde{\mathscr{P}}_0, \widetilde{\mathscr{P}}_0]$ est $\mathscr{P}_0$ (commutative, donc nilpotente). On a la suite exacte $0 \to \mathscr{P}_0 \to \widetilde{\mathscr{P}}_0 \to \mathrm{u}(1) \to 0$, où u(1) désigne l'algèbre de Lie monodimensionnelle (à un générateur : c'est l'algèbre de Lie des groupes commutatifs **R** – non compact – et U(1) – compact) ; c'est un produit semi-direct, c'est-à-dire que $\widetilde{\mathscr{P}}_0 = \mathrm{u}(1).\mathscr{P}_0$, l'homomorphisme

$$\mathrm{u}(1) \to \mathrm{Dér}\,(\mathscr{P}_0) = \mathrm{gl}(4, \mathbf{R})$$

($\mathrm{gl}(4, \mathbf{R})$ est l'algèbre des matrices réelles 4×4) le définissant étant celui qui envoie le générateur π' sur l'identité d'ordre 4, $\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} = I_4$.

Notons $\widetilde{D}_N = \begin{pmatrix} D_N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ où D_N est la « représentation de Naïmark » de £. $\widetilde{D}_N$ définit un homomorphisme de £ dans $\mathrm{gl}(5, \mathbf{R})$. De plus, il est clair que $\widetilde{D}_N(£) \subset \mathrm{Dér}\,(\widetilde{\mathscr{P}}_0)$ si l'on prend pour $\widetilde{\mathscr{P}}_0$ la base $(p_\mu ; \pi')$ $(\mu = 1, \ldots, 4)$. D'ailleurs, soit $D \in \mathrm{Dér}\,(\widetilde{\mathscr{P}}_0)$, et posons $D\pi' = \alpha\pi' + T(D\pi')$, où $T(D\pi') \in \mathscr{P}_0$, et

$$Dp_0 = \alpha(p_0)\,\pi' + T(Dp_0), \text{ où } T(Dp_0) \in \mathscr{P}_0 .$$

On doit avoir :

$$Dp_0 = D[\pi', p_0] = [D\pi', p_0] + [\pi', Dp_0] = \alpha p_0 + T(Dp_0) ,$$

d'où $\alpha = 0$, et

$$Dp_0 = T(Dp_0), \text{ soit } \alpha(p_0) = 0 ; \text{ donc } \forall D \in \mathrm{Dér}\,(\widetilde{\mathscr{P}}_0),\ D\widetilde{\mathscr{P}}_0 \subset \mathscr{P}_0$$

(évident *a priori*, $\mathscr{P}_0$ étant le plus grand idéal nilpotent de $\widetilde{\mathscr{P}}_0$). Réciproquement, soit D une application (linéaire) quelconque $\widetilde{\mathscr{P}}_0 \to \mathscr{P}_0$: on a

$$D[\pi', p_0] = Dp_0 = [\pi', Dp_0] = [D\pi', p_0] + [\pi', Dp_0] .$$

Donc, en prenant $\widetilde{\mathscr{P}}_0 = \mathscr{P}_0 + \mathbf{R}\pi'$, on aura $\mathrm{Dér}\,(\widetilde{\mathscr{P}}_0) = \left\{ \begin{pmatrix} \boxed{} \\ 00000 \end{pmatrix} \right\}$ où le rectangle hachuré représente une matrice rectangulaire 4×5 quelconque (à coefficients réels).

Par conséquent $\underline{\text{Dér}(\mathscr{P}) \approx \mathfrak{L}.\widetilde{\mathscr{P}}_0}$, produit semi-direct défini par l'homomorphisme $\widetilde{D}_N$ de $\mathfrak{L}$ dans Dér $(\widetilde{\mathscr{P}}_0)$.

De plus, on a $\underline{\text{Dér}(\mathscr{P}) \approx \mathfrak{u}(1).\mathscr{P}}$, produit semi-direct défini par l'homomorphisme $\mathfrak{u}(1) \to \mathbf{R}\pi \subset \underline{\text{Dér}(\mathscr{P})}$, où $\mathbf{R}\pi$ désigne l'algèbre engendrée par π (sur $\mathbf{R}$).

En outre, on peut considérer $\mathfrak{L}.\widetilde{\mathscr{P}}_0$ comme engendrée par $\mathscr{P}$ et π'. Or $[\pi', l] = 0$ et $[\pi', p_0] = p_0$, si $l \in \mathfrak{L}$ et $p_0 \in \mathscr{P}_0$. On aura donc

$$\underline{\text{Dér}(\mathscr{P}) \approx (\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{u}(1)).\mathscr{P}_0},$$

produit semi-direct défini par l'homomorphisme

$$\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{u}(1) \to \text{Dér}(\mathscr{P}_0) = \mathfrak{gl}(4, \mathbf{R}) : l \rightsquigarrow D_N(l),\ \pi' \rightsquigarrow I_4 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Revenons à l'algèbre résoluble $\widetilde{\mathscr{P}}_0$. On a

$$ad_{\widetilde{\mathscr{P}}_0} \pi' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},\quad ad_{\widetilde{\mathscr{P}}_0} p_\mu = E_{\mu 5}\ (\mu = 1, \ldots, 4)\ ;$$

$(E_{\alpha\beta})$ est la base canonique des algèbres $\mathfrak{gl}$: la matrice $E_{\alpha\beta}$ a pour coefficients $+1$ au croisement de la ligne α et de la colonne β, et 0 ailleurs. On obtiendra ainsi une *représentation pentadimensionnelle réelle de* $\mathscr{P}$:

$$l \to \begin{pmatrix} D_N(l) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\qquad p_\mu \rightsquigarrow E_{\mu 5}\ (\mu = 1, \ldots, 4)\ .$$

En outre, la correspondance

$$adl \rightsquigarrow \begin{pmatrix} D_N(l) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ adp_\mu \rightsquigarrow E_{\mu 5} \text{ et } \pi \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix},\ \text{ou } \frac{1}{5}\begin{pmatrix} I_4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

est une représentation pentadimensionnelle de $\underline{\text{Dér}(\mathscr{P})}$.

Remarques. Ici aussi, on peut remplacer $\mathbf{R}$ par un corps commutatif de caractéristique quelconque. De plus, on pouvait s'attendre au résultat trouvé pour Dér $(\mathscr{P})$. En effet, la restriction des opérations de Dér $(\mathscr{P})$ à $\mathscr{P}_0$ fournit une algèbre $\text{Dér}(\mathscr{P})|_{\mathscr{P}_0} \supset ad_{\mathscr{P}}\ \mathfrak{L}\,|_{\mathscr{P}_0} = D_N(\mathfrak{L}) \approx \mathfrak{so}(3,1)$, sous algèbre maximale de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$.

Or on sait (cf. Dynkin ([14])) que l'on peut réaliser l'algèbre complexe $\mathfrak{sl}(2) \oplus \mathfrak{sl}(2) \approx \mathfrak{L}(\mathbf{C})$ comme une sous-algèbre « non régulière et non simple » maximale de $\mathfrak{sl}(4)$, et que l'algèbre complexe $\mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_1$ est régulière et maximale dans $\mathfrak{a}_3$ (« régulière » = il existe une base de Weyl de $\mathfrak{a}_3$, correspondant à une sous-algèbre de Cartan, telle que cette sous-algèbre de Cartan possède une sous-algèbre dont les éléments associés dans la base de Weyl engendrent la sous-algèbre régulière ; en d'autres termes, son diagramme

de Dynkin est un « sous-diagramme » de celui de $\mathfrak{a}_3$). Il en résulte que $\mathfrak{L}$ (réalisé ou non par $D_N(\mathfrak{L})$) est une sous-algèbre maximale de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$, donc que $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{u}(1)$ est maximale dans $\mathfrak{gl}(4, \mathbf{R}) \approx \text{Dér}\,(\mathscr{P}_0)$. Donc ou bien $\text{Dér}\,(\mathscr{P}) \mid_{\mathscr{P}_0} \approx \mathfrak{gl}(4, \mathbf{R})$, ou bien $\text{Dér}\,(\mathscr{P}) \mid_{\mathscr{P}_0} \approx \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{u}(1)$: on se convainc aisément que seule la 2e alternative est valable, et ceci invite à penser que la structure de $\text{Dér}\,(\mathscr{P})$ est bien celle que l'on a obtenue.

4. Etude des extensions inessentielles $0 \to \mathscr{P} \to \mathscr{R} \to \mathfrak{X} \to 0$. Rappelons que si $\mathfrak{X}$ est semi-simple, ces extensions sont les seules. Ce sont également les seules extensions de $\mathfrak{X}$ par $\mathscr{P}$ pour tout $\mathfrak{X}$, puisque le centre de $\mathscr{P}$ est nul et $\text{Dér}\,(\mathscr{P}) \approx \mathfrak{u}(1).\,\mathscr{P}$.

On cherche donc $\varphi(x) \in \text{Dér}\,(\mathscr{P})$ tel que $\varphi([x_1, x_2]) = [\varphi(x_1), \varphi(x_2)]$ pour tous $x_1, x_2 \in \mathfrak{X}$, φ étant l'homomorphisme $\mathfrak{X} \to \text{Dér}\,(\mathscr{P})$ qui définira le produit semi-direct.

Or on sait que tout $\varphi(x) \in \text{Dér}\,(\mathscr{P})$ s'écrit $\varphi(x) = adp(\varphi(x)) + \alpha(\varphi(x))\,\pi$, où $p(\varphi(x)) = \theta(\varphi(x)) + p_0(\varphi(x))$, et que de plus $\varphi(x) \rightsquigarrow \theta(\varphi(x))$ est un homomorphisme $\text{Dér}\,(\mathscr{P}) \to \mathfrak{L}$, $\varphi(x) \rightsquigarrow adp_0(\varphi(x))$ est une dérivation de $\text{Dér}\,(\mathscr{P})$, et que $\alpha([\varphi(x_1), \varphi(x_2)]) = 0$.

Par conséquent, pour tout $x \in [\mathfrak{X}, \mathfrak{X}]$ (l'algèbre dérivée de $\mathfrak{X}$), et qui donc est combinaison linéaire (réelle) d'éléments de la forme $[x_1, x_2]$, on aura

$$\alpha(\varphi(x)) = \alpha\left(\sum_{k=1}^{k'} [\varphi(x_1^k), \varphi(x_2^k)]\right)$$

puisque φ est un homomorphisme ; d'où

$$\alpha(\varphi(x)) = \sum_{k=1}^{k'} \alpha([\varphi(x_1^k), \varphi(x_2^k)]) = 0\,,$$

car $\alpha(D)$ dépend linéairement de D. Donc, pour toute algèbre $\mathfrak{X}$ telle que $[\mathfrak{X}, \mathfrak{X}] = \mathfrak{X}$, $\varphi(x) = adp(\varphi(x))$. Or $\mathscr{P}$ est de centre nul ; l'application adjointe est donc un isomorphisme. En composant avec ad^{-1}, on aura $p(\varphi(x)) = ad^{-1} \circ \varphi(x) = \psi(x)$, où ψ est un homomorphisme $\mathfrak{X} \to \mathscr{P}$. On peut également vérifier ceci à l'aide de la forme explicite de $p((\varphi(x)) = \theta(\varphi(x)) + p_0(\varphi(x))$.
θ est en effet un homomorphisme $\text{Dér}\,(\mathscr{P}) \to \mathfrak{L}$; donc $\theta \circ \varphi$ est un homomorphisme $\mathfrak{X} \to \mathfrak{L}$.

De plus, on a vu que

$$\begin{aligned} adp_0(\varphi([x_1, x_2])) &= adp_0([\varphi(x_1), \varphi(x_2)]) \\ &= [adp_0(\varphi(x_1)), \varphi(x_2)] + [\varphi(x_1), adp_0(\varphi(x_2))]\,. \end{aligned}$$

Or $\varphi(x) = adp(\varphi(x))$, et l'application ad est un isomorphisme ; donc :

$$p_0(\varphi([x_1, x_2])) = [p_0(\varphi(x_1)), p(\varphi(x_2))] + [p(\varphi(x_1)), p_0(\varphi(x_2))]$$

et on retrouve bien que

$$p(\varphi([x_1, x_2])) = [p(\varphi(x_1)), p(\varphi(x_2))] .$$

On a ainsi montré le résultat suivant :

PROPOSITION. *Si* $\mathfrak{X} = [\mathfrak{X}, \mathfrak{X}]$, *toute extension inessentielle de* $\mathfrak{X}$ *par* $\mathscr{P}$ *est définie par un homomorphisme* $\psi : \mathfrak{X} \to \mathscr{P}$.

L'homomorphisme de définition $\varphi : \mathfrak{X} \to \text{Dér}\,(\mathscr{P})$ peut être alors pris comme étant $\varphi = ad \circ \psi : \mathfrak{X} \to \text{Dér}_{\text{int}}\,(\mathscr{P}) \approx ad\mathscr{P}$, l'idéal des dérivations intérieures. On sait que l'extension est triviale si $\varphi = 0$, donc si $\psi = 0$ (ce qui est équivalent). Cherchons à quelles conditions on peut avoir $\psi \neq 0$ si $\mathfrak{X}$ est semi-simple. On a $\mathfrak{X}/\ker \psi = \text{Im}\,\psi \subset \mathscr{P}$. Or $\mathfrak{X}$ est produit direct d'idéaux simples. Ker ψ est donc nécessairement semi-simple, et Im ψ aussi. On peut donc avoir Im $\psi = \{ 0 \}$, ou isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$, ou $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, ou à $\mathfrak{L}$; et ce sont les seules possibilités, car $\mathfrak{L}$ est sous-algèbre de Levi de $\mathscr{P}$ (et en outre, en composant au besoin par un automorphisme spécial de $\mathscr{P}$, de la forme $e^{ad\,p_0} = (I + adp_0)$, ce qui donne une extension équivalente, on pourra toujours se ramener au cas où Im $\psi \subset \mathfrak{L}$ — mais nous n'aurons pas besoin de cette remarque). Il en résulte que l'on a $\mathfrak{X} \approx \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$, avec $\psi(\mathfrak{X}_2) = 0$ et $\mathfrak{X}_1 = \{ 0 \}$ ou $\mathfrak{so}(3)$, ou $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, ou $\mathfrak{L}$. Si $\mathfrak{X}_1 = \{ 0 \}$, on aura $\psi = 0$, et l'extension est évidemment triviale. Nous allons voir que, même si $\psi \neq 0$, et même si $\mathfrak{X}$, sans être semi-simple, est seulement égale à son algèbre dérivée (c'est en particulier le cas si $\mathfrak{X} \approx \mathscr{P}$), l'extension est équivalente à l'extension triviale.

5. Théorème. *Soit une extension inessentielle* $0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{f} \underset{\nu}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} \mathfrak{b} \to 0$, *définie par un homomorphisme* $\varphi = ad \circ \psi$, *où* ψ *est un homomorphisme* $\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}$: *elle est équivalente à l'extension triviale* $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$.

La définition du produit de Lie (crochet) sur l'espace vectoriel $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ (ou, plus généralement, sur le module $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, car le résultat ci-dessus est valable pour des algèbres de Lie sur un anneau commutatif à élément unité quelconque) est, par hypothèse :

$$\begin{aligned}[(a, b), (a', b')] &= ([a, a'] + ad\psi(b).a' - ad\psi(b').a, [b, b']) \\ &= ([a + \psi(b), a' + \psi(b')] - \psi([b, b']), [b, b'])\end{aligned}$$

car ψ est un homomorphisme.

Considérons alors l'application $f : \mathfrak{f} \to \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ définie par :

$$\mathfrak{f} \ni (a, b) \overset{f}{\rightsquigarrow} (a + \psi(b), b) \in \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$$

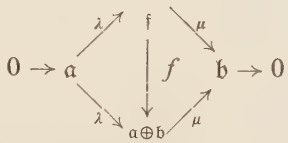
(on considère les éléments de $\mathfrak{f}$ et ceux de $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$ comme des couples (a, b), où $a \in \mathfrak{a}$ et $b \in \mathfrak{b}$, seule la loi de produit étant différente dans les deux cas). Il est clair que f est un homomorphisme, car :

$$[(a, b), (a', b')]_{\mathfrak{f}} = ([a + \psi(b), a' + \psi(b')] - \psi([b, b']), [b, b'])$$

$$\rightsquigarrow^{f} ([a + \psi(b), a' + \psi(b')], [b, b']) =$$

$$= [(a + \psi(b), b), (a' + \psi(b'), b')]_{\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}} .$$

On a donc le diagramme



où $\lambda : a \rightsquigarrow (a, 0)$ et $\mu : (a, b) \rightsquigarrow b$ (dans les 2 cas). Or ce diagramme est commutatif, car

$$\begin{cases} (f \circ \lambda)(a) = f((a, 0)) = (a, 0) = \lambda(a) \\ (\mu \circ f)(a, b) = \mu((a + \psi(b), b)) = b = \mu((a, b)) . \end{cases}$$

Il en résulte (cf. ([12])) que f est bijectif, et que les deux extensions sont équivalentes. D'ailleurs, l'isomorphisme inverse est immédiat ; il s'écrit :

$$f^{-1} : \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \ni (a, b) \rightsquigarrow (a - \psi(b), b) \in \mathfrak{f} .$$

$\mathfrak{f}$ est ainsi isomorphe à $\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$. Explicitons ceci ; tout élément (a, b) de $\mathfrak{f}$ peut s'écrire $(a, b) = (a + \psi(b), 0) + (- \psi(b), b)$, et on voit aisément que :

$$[(a + \psi(b), 0), (- \psi(b), b)]_{\mathfrak{f}} = 0 ,$$

et que :

$$[(a + \psi(b), 0), (a', b')] = ([a + \psi(b), a' + \psi(b')], 0)$$

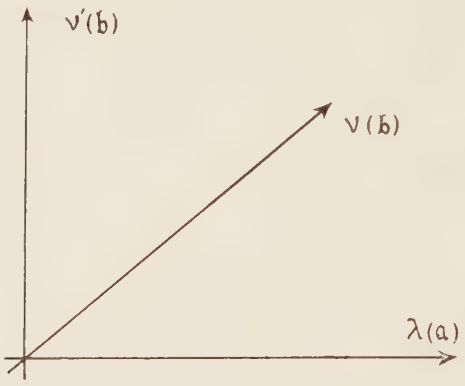
et

$$[(- \psi(b), b), (a', b')] = [- \psi([b, b']), [b, b'])$$

$\mathfrak{f}$ est ainsi somme directe de deux idéaux, ce que l'on peut noter comme suit :

$$\mathfrak{f} = (\mathfrak{a} + \psi(\mathfrak{b}), 0) \oplus (- \psi(\mathfrak{b}), \mathfrak{b}) = \lambda(\mathfrak{a}) \oplus (- \psi(\mathfrak{b}), \mathfrak{b}) ;$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{f}$ est somme directe de l'idéal $\lambda(\mathfrak{a})$ et de l'idéal $\nu'(\mathfrak{b}) = (- \psi(\mathfrak{b}), \mathfrak{b})$, alors que $\nu(\mathfrak{b}) = \{ (0, b) \mid b \in \mathfrak{b} \}$ n'était qu'une sous-algèbre supplémentaire de $\lambda(\mathfrak{a})$. En apparence, l'extension obtenue n'était pas triviale, mais cela était dû au fait que l'on avait construit ce qu'il est possible d'appeler un « *produit direct oblique* ». En appelant en effet « orthogonaux » deux éléments de $\mathfrak{f}$ dont le crochet est nul, ou deux ensembles d'éléments ayant cette propriété, on voit que $\lambda(\mathfrak{a})$ est orthogonal à $\nu'(\mathfrak{b})$, mais pas à $\nu(\mathfrak{b})$, ce que l'on peut représenter symboliquement comme suit :



COROLLAIRE. *Si le centre de* $\mathfrak{a}$ *est nul, toute extension inessentielle de* $\mathfrak{b}$ *par* $\mathfrak{a}$, *correspondant à un homomorphisme* $\varphi : \mathfrak{b} \to \mathrm{Dér}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{a})$, *est équivalente à l'extension triviale.*

En effet, on peut alors prendre $\psi = ad^{-1} \circ \varphi$. Ceci équivaut à dire que l'homomorphisme $\bar{\varphi} : \mathfrak{b} \to \mathrm{Dér}\,(\mathfrak{a})/\mathrm{Dér}_{\mathrm{int}}(\mathfrak{a})$ défini par φ, est l'homomorphisme trivial.

On retrouve ici une situation analogue à celle des extensions de groupes. Dans ce dernier cas, en effet, on sait que si l'on a une extension $1 \to A \to G \to B \to 1$ telle que l'homomorphisme $\Phi : B \to \dfrac{\mathrm{Aut}\,(A)}{\mathrm{Int}\,(A)}$ qu'elle définit soit trivial, l'extension est centrale (cf. Kurosh). Et l'on sait (cf. Bourbaki ([12])) que toute extension inessentielle et centrale d'algèbres de Lie est triviale (la démonstration est d'ailleurs immédiate : la sous-algèbre supplémentaire de ker μ, soit Im $\lambda = \lambda(\mathfrak{a})$, dans $\mathfrak{f}$ commute avec $\lambda(\mathfrak{a})$, puisque ce dernier est dans le centre de $\mathfrak{f}$, donc elle est un idéal). Ce phénomène rejoint le fait que l'algèbre quotient $\mathrm{Dér}\,(\mathfrak{a})/ad\mathfrak{a}$, algèbre qui est celle du groupe $\dfrac{\mathrm{Aut}\,(\mathfrak{a})}{\mathrm{Int}\,(\mathfrak{a})} \approx \dfrac{\mathrm{Aut}\,(A)}{\mathrm{Int}\,(A)}$ si $\mathrm{Int}\,(\mathfrak{a}) = AdA$ est un sous-groupe *fermé* de Aut $(\mathfrak{a})$ (ce qui n'est pas toujours le cas), A désignant le groupe de Lie connexe et simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$, joue, pour les extensions d'algèbres, un rôle analogue à celui du groupe abstrait $\mathrm{Aut}_a(A)/\mathrm{Int}\,(A)$ (où $\mathrm{Aut}_a\,(A)$ désigne le groupe des automorphismes algébriques, non nécessairement continus, du groupe abstrait A) dans le cas des extensions de groupes, ou encore à celui du groupe $\mathrm{Aut}\,(A)/\mathrm{Int}\,(A)$ pour ce qui est des extensions topologiques de groupes de Lie.

6. Conclusion de cette étude. Pour ce qui est des extensions de ou par $\mathscr{P}$ on a ainsi obtenu [par une étude directe, ce qui nous a paru préférable ici à l'utilisation des résultats de Hochschild sur les dérivations et l'étude cohomologique des extensions] les résultats suivants :

THÉORÈME. *Toute extension de $\mathscr{P}$ par $\mathfrak{X}$ semi-simple, ou d'une algèbre $\mathfrak{X}$ semi-simple par $\mathscr{P}$, est équivalente à l'extension triviale. Toute extension inessentielle d'une algèbre de Lie $\mathfrak{X}$ telle que $\mathfrak{X} = [\mathfrak{X}, \mathfrak{X}]$ par $\mathscr{P}$ est équivalente à l'extension triviale.*

On sait en effet qu'une extension de $\mathfrak{X}$ semi-simple (donc telle que $[\mathfrak{X}, \mathfrak{X}] = \mathfrak{X}$) est inessentielle, et que toute extension inessentielle de $\mathfrak{X}$, telle que $[\mathfrak{X}, \mathfrak{X}] = \mathfrak{X}$, par $\mathscr{P}$, est donnée par un homomorphisme $\psi : \mathfrak{X} \to \mathscr{P}$, donc est équivalente à l'extension triviale.

Remarquons que l'on peut faire $\mathfrak{X} = \mathscr{P}' \approx \mathscr{P}$. Si donc on formulait l'hypothèse que l'algèbre interne était une algèbre $\mathscr{P}'$ (isomorphe à $\mathscr{P}$), algèbre de Poincaré relative à un certain espace de Minkowski interne, le lien entre $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ fourni par la théorie des extensions serait trivial, du fait que l'on cherche une extension inessentielle, d'ailleurs le seul des types d'extension dans lequel les deux algèbres à étendre sont des sous-algèbres, l'une étant même (comme pour toute extension) un idéal. Notons au passage la *dissymétrie fondamentale* de la notion d'extension (non triviale) : il est très différent d'étendre $\mathfrak{a}$ par $\mathfrak{b}$ et d'étendre $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$; l'algèbre par laquelle on étend donne un idéal de l'extension, et celle que l'on étend ne donne en général même pas une sous-algèbre. Eu égard à cette dissymétrie, le résultat négatif que nous venons d'obtenir (pour $\mathfrak{X}$ semi-simple) est somme toute réconfortant : sinon, il resterait à comprendre pourquoi la Nature préfère étendre l'algèbre externe par l'algèbre interne, ou vice-versa, et pas le contraire !

B) REMARQUES SUR LES EXTENSIONS DE GROUPES. PROBLÈMES DIVERS

1. Les groupes U(2) et SU(2). Soit une matrice $u \in \mathrm{U}(2)$, $u = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; on a donc $|a|^2 + |b|^2 = 1$, $|c|^2 + |d|^2 = 1$, $a\bar{c} + b\bar{d} = 0$; elle dépend donc de 4 paramètres. On peut alors l'écrire

$$u = \begin{pmatrix} \cos\psi\, e^{i\alpha} & \sin\psi\, e^{i\beta} \\ \cos\varphi\, e^{i\gamma} & \sin\varphi\, e^{i\delta} \end{pmatrix} \quad \text{avec la condition :}$$

$$\cos\varphi \cos\psi\, e^{i(\alpha-\gamma)} + \sin\varphi \sin\psi\, e^{i(\beta-\delta)} = 0 . \tag{1}$$

Si alors $\cos\varphi \cos\psi \neq 0$, et $\sin\varphi \sin\psi \neq 0$, on devra avoir

$$\alpha - \gamma = \beta - \delta + k\pi,$$

où $k \in \mathbf{Z}$, donc $\cos(\varphi \pm \psi) = 0$, d'où $\varphi \pm \psi \equiv \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ (mod. 2π), où on prend le signe $-$ si k est pair et $+$ si k est impair.

Si $\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$, on trouve

$$u = \begin{pmatrix} \cos\psi\, e^{i\alpha} & \sin\psi\, e^{i\beta} \\ -\sin\psi\, e^{i\gamma} & \cos\psi\, e^{i(\beta+\gamma-\alpha)} \end{pmatrix}.$$

Si $\varphi = -\psi + \frac{\pi}{2}$, on trouve la même chose, en changeant γ en $\gamma - \pi$ (par exemple).

Si $\varphi = \psi + \frac{3\pi}{2}$, on arrive à la même forme en changeant γ en $\gamma + \pi$ (par exemple).

Si $\varphi = -\psi + \frac{3\pi}{2}$, on obtient la même forme.

Si $\cos\varphi \cos\psi = 0$, on devra aussi avoir $\sin\varphi \sin\psi = 0$, et inversement. Donc $\varphi \equiv 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ (modulo π), auquel cas $\psi \equiv \frac{\pi}{2}$ ou 0 (mod. π, respectivement). Dans chacun de ces cas, on retombe sur la forme précédente.

On a $\det u = e^{i(\beta+\gamma)}$. SU(2) correspond au cas où $\beta \equiv -\gamma$ (mod. 2π). Le paramètre ψ sera défini modulo $\frac{\pi}{2}$, et α, β, γ modulo 2π. On a ainsi une bonne paramétrisation pour $0 < \psi < \frac{\pi}{2}$. Les valeurs $\psi = 0$ et $\psi = \frac{\pi}{2}$ sont « singulières » : en effet, le sous-groupe $\left\{ \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha'} \end{pmatrix} \right\} \approx U(1) \times U(1)$ correspond à $\psi = 0$, c'est-à-dire qu'on a un paramètre de trop. De même pour le sous-ensemble qui correspond à la valeur $\psi = \frac{\pi}{2}$. L'identité étant « singulière » pour cette paramétrisation, on ne peut en principe s'en servir pour obtenir l'algèbre de Lie par la méthode de Cartan, à l'aide d'une représentation infinitésimale. Si $u \in SU(2)$, on pourra écrire :

$$u = \begin{pmatrix} \cos\psi\, e^{i\alpha} & \sin\psi\, e^{i\beta} \\ -\sin\varphi\, e^{-i\beta} & \cos\psi\, e^{-i\alpha} \end{pmatrix}.$$

On retrouve la même singularité. Elle est liée à l'impossibilité d'utiliser une seule carte pour représenter la variété S^3 (sphère en 3 dimensions, laquelle est plongée dans un espace quadridimensionnel au moins), à laquelle SU(2) est homéomorphe.

Si $u \in SU(2)$, on écrira donc $u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$, avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Si l'on veut utiliser la méthode de Cartan pour passer à l'algèbre de Lie, il faudra alors « déplacer la singularité », c'est-à-dire utiliser une carte pour laquelle l'identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ corresponde à la valeur 0 des 3 paramètres, et à celle-là seulement. On fera donc, par exemple :

$$\begin{cases} a = \cos\psi(\cos\alpha\cos\beta + i\sin\alpha) \\ b = \cos\psi\cos\alpha\sin\beta + i\sin\psi\,. \end{cases}$$

Si $u \in U(2)$, dét $u = e^{i\omega}$, on écrira de même

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b}\,e^{i\omega} & \bar{a}\,e^{i\omega} \end{pmatrix},$$

avec $|a|^2 + |b|^2 = 1$ ici aussi.

Si $\omega = 0$, on a bien $u \in SU(2)$.

2. Extensions de groupes : U(2) est le produit semi-direct topologique U(1). SU(2).

Soit un produit semi-direct $1 \to A \xrightarrow{\lambda} G \underset{\nu}{\overset{\mu}{\leftrightarrows}} B \to 1$ ($\ker\mu = \mathrm{Im}\,\lambda$), ($\lambda$, ν isomorphismes de A, B dans G ; μ épimorphisme, tel que $\mu \circ \nu =$ identité sur B). Tout élément $g \in G$ s'écrit de façon unique $g = \lambda(a)\,\nu(b)$, où les éléments $\lambda(a)$ et $\nu(b)$ ($a \in A$, $b \in B$) sont uniquement déterminés ($b = \mu(g)$, et $\mu(g\nu(b^{-1})) = 1$, donc $g\nu(b^{-1}) = \lambda(a)$ pour un certain $a \in A$). On dit *G produit semi-direct topologique* de ses sous-groupes $\nu(B)$ et $\lambda(A)$ si c'est un produit semi-direct *algébrique*, si $\nu(B)$ et $\lambda(A)$ sont des *sous-groupes fermés* de G, et si l'application $(\lambda(a), \nu(b)) \rightsquigarrow \lambda(a)\,\nu(b)$ de $\lambda(A) \times \nu(B)$ sur G un *homéomorphisme* (cf. Bourbaki, livre III chap. 3, p. 36 (3e édition), et aussi Hofmann et Mostert, A. M. S. Memoirs, n° 43).

Tout d'abord, l'application $U(2) \to U(1) : u \rightsquigarrow$ dét u est un épimorphisme de groupes topologiques, donc son noyau est un sous-groupe normal fermé de U(2), et c'est SU(2) (il est d'ailleurs clair que SU(2) est un sous-groupe normal de U(2) : si $u \in U(2)$, $s \in SU(2)$, $u^{-1}\,su \in SU(2)$ car son déterminant est l'unité).

L'injection $U(1) \to U(2) : e^{i\theta} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme (topologique) de U(1) sur un sous-groupe fermé U′ de U(2). Remarquons qu'il y a d'autres façons d'injecter U(1) dans U(2) comme sous-groupe, par exemple

$$e^{i\theta} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad e^{i\theta} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

mais, pour ce qui va suivre, seule celle choisie convient (la première des 2 autres possibilités signalées, par exemple, donnerait naissance au produit direct $U(1) \times SU(2)$). Toute matrice $u \in U(2)$ s'écrit de façon unique $u = su'$, $s \in SU(2)$, $u' \in U'$, avec, pour

$$u = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b}\,e^{i\omega} & \bar{a}\,e^{i\omega} \end{pmatrix}: \quad s = \begin{pmatrix} a\,e^{-i\omega} & b \\ -\bar{b} & \bar{a}\,e^{i\omega} \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En outre,

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b}\, e^{i\omega} & \bar{a}\, e^{i\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, e^{i\theta} & b\, e^{i\theta} \\ -\bar{b}\, e^{i\omega} & \bar{a}\, e^{i\omega} \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b}\, e^{i\omega} & \bar{a}\, e^{i\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\, e^{i\tau} & b \\ -\bar{b}\, e^{i(\tau+\omega)} & \bar{a}\, e^{i\omega} \end{pmatrix},$$

ces deux produits n'étant égaux que si $\theta = \tau = 0$: donc U′ n'est pas un sous-groupe normal de U(2). De plus, $U' \cap SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Par ailleurs, on sait (cf ([13]), I, p. 61) que U(2) est homéomorphe à l'espace produit U(1) × SU(2). Donc U(2) est *produit semi-direct topologique* de U′ et de SU(2), et U′ est isomorphe à U(1). Précisons comment ; on sait qu'on forme un produit semi-direct $B.A$ à l'aide d'un homomorphisme $\varphi : B \to \mathrm{Aut}_a(A)$ (nécessairement dans Aut (A) s'il s'agit d'un produit semi-direct topologique, comme on le voit facilement), la loi du produit sur l'ensemble produit $A \times B$ étant définie par (A étant le sous-groupe normal) : $(a, b).(a', b') = (a(\varphi(b).a'), bb')$.

Soient alors $u_1 = s_1 u'_1$, $u_2 = s_2 u'_2$ deux éléments de U(2). On a

$$u_1 u_2 = s_1 u'_1 s_2 u'_2 = s_1(u'_1 s_2 u'^{-1}_1) u'_1 u'_2 .$$

A l'élément $u' \in U'$, on fera donc correspondre l'automorphisme $\varphi(u')$ de SU(2) :

$s \rightsquigarrow u's u'^{-1}$. Si

$$s = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad u' = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{on a } u's u'^{-1} = \begin{pmatrix} a & b\, e^{i\theta} \\ -\bar{b}\, e^{-i\theta} & \bar{a} \end{pmatrix} .$$

L'application $u' \rightsquigarrow \varphi(u')$ est bien un homomorphisme, car $\varphi(u').s$ revient à multiplier b par $e^{i\theta}$ (et $e^{i(\theta_1+\theta_2)} = e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$).

Notons que, pour ce qui est des *algèbres de Lie* correspondantes, on a $\mathfrak{u}(2) = \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$, soit un *produit direct*. Nous allons voir que l'existence du produit semi-direct est liée à la position d'un groupe discret ($\mathbf{Z}_2$) dans les groupes en question.

Remarque. De même, l'application $u \rightsquigarrow$ dét u est un épimorphisme continu de U(n) sur U(1), de noyau SU(n), et l'injection U(1) → U(n) : $e^{i\theta} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ & 1 \\ & \ddots \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est un isomorphisme (topologique) de U(1) sur un sous-groupe fermé U′ de U(n). De plus, toute matrice $u \in$ U (n) s'écrit d'une façon

unique $u = su'$, avec $s \in \mathrm{SU}(n)$, $u' \in \mathrm{U}'$, $u' = \begin{pmatrix} \text{dét } u & 0 \\ & 1. \\ 0 & \ddots 1 \end{pmatrix}$ et (cf.([13])) on sait que $\mathrm{U}(n)$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(n)$.

Par conséquent, de même, $\mathrm{U}(n) = \mathrm{U}(1).\mathrm{SU}(n)$, *produit semi-direct topologique*. Pour les algèbres de Lie, on a de même $\mathfrak{u}(n) = \mathfrak{su}(n) \oplus \mathfrak{u}(1)$.

3. Extensions de U(1) par SU(n). Cas de SU(2). Rappelons que deux extensions d'un groupe B par un groupe A sont équivalentes si (et seulement si) elles définissent le même automorphisme $\theta : B \to \dfrac{\mathrm{Aut}_a(A)}{\mathrm{Int}(A)}$, et que tout homomorphisme θ « extensible » (c'est-à-dire de classe nulle dans $H^3(B, Z)$, Z désignant le centre de A, où B opère sur Z de façon définie par θ) donne autant d'extensions inéquivalentes qu'il y a d'éléments dans $H^2(B, Z)$ (cf. pour cela Kurosh, t. II, ou les articles originaux d'Eilenberg-Mac-Lane (Ann. Math. 1947)).

Dans le cas qui nous occupe, on cherche les groupes E tels que la suite $1 \to \mathrm{SU}(n) \to E \to \mathrm{U}(1) \to 1$ soit exacte (en particulier pour $n = 2$). Le centre de $\mathrm{SU}(n)$ est $\mathbf{Z}_n \approx \{ e^{2ik\pi/n} I_n \}$ où I_n est la matrice identité d'ordre n et $k \in \mathbf{Z}$ (les entiers ; il suffit d'ailleurs de prendre k modulo n). Si nous cherchons un groupe de Lie E, on aura nécessairement $\mathrm{Im}\ \theta \subset \dfrac{\mathrm{Aut}(A)}{\mathrm{Int}(A)}$ ($A = \mathrm{SU}(n)$ ici), où $\mathrm{Aut}(A)$ désigne les automorphismes continus.

Or, on sait que, pour $n \geqslant 3$, $\dfrac{\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))}{\mathrm{Int}(\mathfrak{su}(n))} \approx \mathbf{Z}_2$, alors que pour $n = 2$ c'est l'identité (on a mentionné ce résultat, dû à Cartan, au chap. I, 8°). De plus, $\mathrm{SU}(n)$ est simplement connexe, et $\mathrm{Int}(\mathrm{SU}(n))$ est fermé dans $\mathrm{Aut}(\mathrm{SU}(n))$ — c'en est même la composante connexe de l'identité. Donc $\dfrac{\mathrm{Aut}(\mathrm{SU}(n))}{\mathrm{Int}(\mathrm{SU}(n))} \approx \mathbf{Z}_2 (n \geqslant 3)$ puisque $\mathrm{Aut}(\mathrm{SU}(n)) \approx \mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(n))$, et de même pour Int.

De plus, $\dfrac{\mathrm{Aut}(\mathrm{SU}(2))}{\mathrm{Int}(\mathrm{SU}(2))} = 1$. Démontrons ce dernier résultat directement, et pour cela, montrons que $\mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2)) \approx \mathrm{Int}(\mathfrak{su}(2)) \approx \mathrm{SO}(3)$.

Soit en effet $\alpha \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{su}(2))$; prenons une base (X_1, X_2, X_3) de $\mathfrak{su}(2)$, avec $[X_i, X_j] = \varepsilon_{ijk} X_k$. Dans cette base, α s'exprime par une matrice (a_{ij}) telle que

$$\alpha(X_i) = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} X_j .$$

Exprimons que α est un automorphisme :

$$\varepsilon_{ijk}\, \alpha(X_k) = [\alpha(X_i), \alpha(X_j)] .$$

Donc

$$\sum_{k'=1}^{3} a_{kk'} X_{k'} = \left[\sum_{i'=1}^{3} a_{ii'} X_{i'}, \sum_{j'=1}^{3} a_{jj'} X_{j'} \right] \varepsilon_{ijk} .$$

$$= \left(\sum_{i',j'=1}^{3} a_{ii'} a_{jj'} \varepsilon_{i'j'k'} X_{k'} \right) \varepsilon_{ijk} .$$

D'où

$$a_{kk'} = \varepsilon_{ijk} \sum_{i',j'=1}^{3} \varepsilon_{i'j'k'} a_{ii'} a_{jj'} ,$$

soit par exemple $a_{11} = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}$.
Or, si l'on note A_{ij} le mineur de l'élément a_{ij} dans la matrice (a_{ij}), on voit que la condition d'automorphisme s'écrit : $a_{ij} = A_{ij}$ (et c'est cette propriété qui est particulière à su(2), parmi les algèbres su(n)). Notons encore α la matrice (a_{ij}). On a

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{A_{ij}}{|\alpha|} \right), \text{ où } |\alpha| = \det \alpha .$$

donc

$$\alpha^{-1} = \left(\frac{a_{ji}}{|\alpha|} \right) = \frac{1}{|\alpha|} \tilde{\alpha}$$

(où $\sim$ désigne la transposition).

D'où $\alpha' \tilde{\alpha}' = |\alpha| I$; comme α est d'ordre 3, on aura $|\alpha|^2 = |\alpha|^3$ en passant aux déterminants ; et comme $|\alpha| \neq 0$ puisque α est un automorphisme (inversible) on aura $|\alpha| = 1$. Par conséquent, Aut (su(2)) $\approx$ Aut (SU(2)) $\approx$ SO(3). Or

$$\text{Int (SU(2))} \approx \frac{\text{SU(2)}}{\mathbf{Z}_2} \approx \text{SO(3)} .$$

D'où le résultat annoncé. Il en résulte que *toute extension topologique par* SU(2) *est centrale.*

Dans le cas de SU(n) ($n \geqslant 3$), le résultat est différent. Nous sommes cependant en mesure de montrer qu'*il n'existe pas de matrice* $r \in \text{GL}(n, \mathbf{C})$ *telle que l'automorphisme* $s \rightsquigarrow rsr^{-1}$ *qu'elle définit sur* SU(n) *ne soit pas interne.*

Nous montrerons même un résultat un peu plus fort. Soit en effet un automorphisme $\alpha \in \text{Aut (SU}(n))$ et supposons que $\forall s \in \text{SU}(n)$, il existe une matrice $r = r(\alpha, s) \in \text{GL}(n, \mathbf{C})$ telle que $\alpha(s) = rsr^{-1}$, r pouvant dépendre de s. α étant un automorphisme, on devra avoir :

$$r(s_1 s_2).(s_1 s_2).r(s_1 s_2)^{-1} = r(s_1) s_1 r(s_1)^{-1} r(s_2) s_2 r(s_2)^{-1} .$$

On connaît une solution de cette égalité : $r(s_1) = r(s_2) = r(s_1\, s_2)$ fixe, et il nous suffit de trouver une réalisation de l'automorphisme α. Ecrivons donc α sous la forme $s \rightsquigarrow \alpha(s) = r\alpha r^{-1}$, où $r = r(\alpha)$ n'est d'ailleurs déterminé qu'à un facteur multiplicatif près : on le supprimera en prenant $r \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$, ce qui ne change rien à la généralité du problème. De plus, $(rsr^{-1})(rsr^{-1})^* = I_n$ car $\alpha(s) \in \mathrm{SU}(n)$ aussi. Donc $rs(r^{-1}\, r^{-1*})\, s^*\, r^* = I$. Posons $x = r^{-1}\, r^{-1*}$. On doit donc avoir $sx = xs$. Mais $x \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ (et est même hermitien), et l'égalité précédente doit avoir lieu pour tout s. D'après le lemme de Schur, et en vertu de l'hermiticité de x, on aura $x = \lambda^2 I_n$ ($\lambda \in \mathbf{R}$), d'où $x = I_n$ car $x \in \mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$. Donc $r^{-1} \in \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbf{C}) = \mathrm{SU}(n)$. Comme r et $\mathrm{e}^{2ik\pi/n}\, r (k \in \mathbf{Z})$ définissent le même automorphisme (avec $r \in \mathrm{SU}(n)$), on voit que

$$\text{« Aut } (\mathrm{SU}(n)) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbf{C}) \text{ »} \approx \mathrm{Int}\, \mathrm{SU}(n) \approx \frac{\mathrm{SU}(n)}{\mathbf{Z}_n} \approx \frac{\mathrm{U}(n)}{\mathrm{U}(1)},$$

où le sous-groupe normal U(1) de U(n) est celui des matrices $\mathrm{e}^{i\varphi} I_n$ ($\varphi \in \mathbf{R}$). On a noté « Aut (SU(n)) $\cap$ GL (n, $\mathbf{C}$) » le sous-groupe de Aut SU(n) composé des automorphismes « représentables » matriciellement par une matrice r, d'ordre n ; c'est la composante connexe de l'unité de Aut(SU(n)).

Un représentant de « l'automorphisme externe » de SU(n) est la conjugaison. Dans SU(2), c'est un automorphisme interne, car on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Pour ce qui est des extensions de U(1) par SU(n), cependant, le résultat est semblable à celui pour $n = 2$ car Hom (U(1), $\mathbf{Z}_2$) = 0 : elles sont toutes centrales. Plus généralement, *les extensions (topologiques) de tout groupe G qui n'est pas extension de* $\mathbf{Z}_2$ (par un autre groupe A) *par* SU(n) *sont centrales* car s'il n'existe pas de groupe A tel que $G/A \approx \mathbf{Z}_2$, Hom (G, $\mathbf{Z}_2$) = 0.

On a donc autant d'extensions inéquivalentes de U(1) par SU(n) que d'éléments dans $H^2(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_n)$, où U(1) opère trivialement sur $\mathbf{Z}_n$ (puisque les extensions sont centrales).

Or on a la suite exacte de groupes abéliens : $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{R} \to \mathrm{U}(1) \to 0$, puisque $\mathrm{U}(1) \approx \dfrac{\mathbf{R}}{\mathbf{Z}}$ (comme groupe, et lui est aussi homéomorphe).

Comme $\mathbf{Z}$ est un groupe libre, $H^p(\mathbf{Z}, G) = 0$ quel que soit le groupe abélien G, pour $p \geqslant 2$. On a donc la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_n) \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}, \mathbf{Z}_n) \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \to$$

$$\to H^2(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_n) \to H^2(\mathbf{R}, \mathbf{Z}_n) \to 0 = H^2(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n).$$

Mais

$$\mathrm{Hom}\,(\mathbf{R}, \mathbf{Z}_n) = 0 = \mathrm{Hom}\,(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_n)\,;$$

en outre, on sait que $\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) = \mathbf{Z}_n$.
On peut aussi le voir directement.
En effet, on a les n homomorphismes $k \rightsquigarrow$ classe de mk dans $\dfrac{\mathbf{Z}}{n\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}_n$, pour $m = 0, 1, \ldots, n-1$; ils sont tous distincts ; si $m = 0$, c'est l'homomorphisme trivial ; pour $m \neq 0$, si $(m, n) = 1$, on recouvre tout $\mathbf{Z}_n$, alors que si $(m, n) = p$, on a $\mathbf{Z}_{n/p}$ pour image. Or la correspondance $m \rightsquigarrow \rightsquigarrow$ (homomorphisme défini par m) est un isomorphisme, d'où le résultat. En outre, on a $H^2(\mathbf{R}, \mathbf{Z}_n) = (\text{Extensions abéliennes de } \mathbf{R} \text{ par } \mathbf{Z}_n) = 0$. La suite exacte précédente se réduit donc à

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) \to H^2(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_n) \to 0\,.$$

La flèche centrale est donc un isomorphisme, et $H^2(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_n) \approx \mathbf{Z}_n$.
On a donc n extensions inéquivalentes de U(1) *par* SU(n).

Remarque. On a aussi la suite exacte $0 \to n\mathbf{Z} \to \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}_n \to 0$, d'où une suite de cohomologie (qui s'arrête car $H^2(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_n) = 0$). Mais on a Aut $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}_{\varphi(n)}$, où $\varphi(n) =$ nombre des $m = 1, \ldots, n-1$ premiers avec n ; dans ce cas, on peut donc avoir des extensions non centrales, et par conséquent plus d'extensions. Ce n'est pas le cas de $n = 2$, car Aut $\mathbf{Z}_2 = 0$.

Rappelons en outre qu'on obtient (cf chap. I, 5°) les diverses extensions avec les divers 2-cocycles (modulo les 2-cobords).

4. Etude particulière des 2 extensions de U(1) par SU(2). On sait qu'il y a 2 telles extensions inéquivalentes, et on en connaît deux : le produit direct SU(2) × U(1), et le produit semi-direct U(1).SU(2) ≈ U(2). Etudions de plus près cette situation.

Soit $e^{i\omega} \in \mathrm{U}(1)$. La fonction

$$\varepsilon(\omega_1, \omega_2) \equiv \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi}\right] - \left[\frac{\omega_1}{2\pi}\right] - \left[\frac{\omega_2}{2\pi}\right] \pmod 2$$

est une fonction $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(2) \to \mathbf{Z}_2$, soit un 2-cocycle, sans être un 2-cobord (car $\left[\dfrac{\omega}{2\pi}\right]$, modulo 2, où $[x]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x, n'est pas une fonction $\mathrm{U}(1) \to \mathbf{Z}_2$, pour ω défini modulo 2π). On peut donc le prendre pour représentant de la classe non triviale de $H^2(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_2)$. Comme $H^2(\mathrm{U}(1), I) = 0$, on peut représenter chacune des deux extensions inéquivalentes de U(1) par SU(2) comme produit de l'extension U(1) × SU(2) (ou de U(2) si l'on préfère) par une des deux extensions inéquivalentes de U(1) par $\mathbf{Z}_2$, au sens du produit d'extensions (cf Eilenberg-Mac-Lane, Ann. Math., 48 (1947)) — c'est-à-dire comme sous-groupe du produit

direct de ces extensions, formé des couples ayant même projection sur U(1), modulo le sous-groupe normal formé des couples (z, z^{-1}) où $z \in$ centre de SU(2) = $(\mathbf{Z}_2)$.

Les deux extensions inéquivalentes de U(1) par $\mathbf{Z}_2$ sont le produit direct, correspondant aux cocycles qui sont des cobords, soit le groupe formé des couples $((-1)^{\eta}, e^{i\omega})$ — en prenant $\mathbf{Z}_2 = \{1, -1\}$ — avec la loi de produit :

$$((-1)^{\eta_1}, e^{i\omega_1})\,((-1)^{\eta_2}, e^{i\omega_2}) = ((-1)^{\eta_1+\eta_2}, e^{i(\omega_1+\omega_2)}),$$

et le produit « mélangé » (ce n'est pas un produit semi-direct car

$$\mathrm{Aut}\,(\mathbf{Z}_2) = 0),$$

où le résultat du produit est

$$((-1)^{\eta_1+\eta_2+\varepsilon(\omega_1,\omega_2)}, e^{i(\omega_1+\omega_2)});$$

remarquons que

$$((-1)^{\eta}, e^{i\omega})\,((-1)^{\eta'}, 1)\,((-1)^{\eta+1}, e^{-i\omega}) = ((-1)^{\eta'}, 1),$$

car

$$\varepsilon(\omega, -\omega) = \left[\frac{\omega}{2\pi}\right] + \left[\frac{-\omega}{2\pi}\right] \equiv 1,$$

et on retrouve donc que U(1) opère trivialement sur $\mathbf{Z}_2$.

Les extensions de U(1) par SU(2) sont donc formées des « bicouples » : $((s, e^{i\omega}), ((-1)^{\eta}, e^{i\omega}))$ avec identification de

$$((I, 1), (1, 1)) \text{ et de } ((-I, 1), (-1, 1)).$$

On peut donc les représenter par les couples : $((-1)^{\eta} s, e^{i\omega})$ avec les lois de produit :

$$((-1)^{\eta_1} s_1, e^{i\omega_1})\,((-1)^{\eta_2} s_2, e^{i\omega_2}) = ((-1)^{\eta_1+\eta_2+\varepsilon_0(\omega_1,\omega_2)} s_1 s_2,\ e^{i(\omega_1+\omega_2)}),$$

ou encore par les couples $(s, e^{i\omega})$ avec la loi de produit :

$$(s_1, e^{i\omega_1})\,(s_2, e^{i\omega_2}) = ((-1)^{\varepsilon_0(\omega_1,\omega_2)} s_1 s_2, e^{i(\omega_1+\omega_2)})$$

où $\varepsilon_0(\omega_1, \omega_2) = 0$ pour le produit direct, et $\varepsilon(\omega_1, \omega_2)$ pour l'autre classe, que nous allons voir être celle du produit semi-direct U(2).

Etude du produit semi-direct U(2) = U(1).SU(2). L'application

$$(s, e^{i\omega}) \rightsquigarrow (-1)^{[\omega/2\pi]} s \otimes e^{i\omega/2}$$

est bien définie, et c'est un homomorphisme de l'extension non triviale U(1).SU(2) dans U(2), car

$$((-1)^{\varepsilon(\omega_1,\omega_2)} s_1 s_2, e^{i(\omega_1+\omega_2)}) \rightsquigarrow (-1)^{[\omega_1/2\pi]+[\omega_2/2\pi]} s_1 s_2 \otimes e^{i(\omega_1+\omega_2)/2}.$$

On a l'homomorphisme inverse $U(2) \to U(1).SU(2)$ donné par, si dét $u = e^{i\omega}$:

$$u \to ((-1)^{[\omega/2\pi]}\, u \otimes e^{-i\omega/2}, e^{i\omega}) .$$

Donc $U(2) \approx U(1).SU(2)$, et de plus on voit que le produit semi-direct U(2) correspond au cocycle non trivial de $H^2(U(1), \mathbf{Z}_2)$.

D'ordinaire, on représente le produit semi-direct autrement, à savoir avec les couples $(s', e^{i\omega})$ et la loi de produit $(s'_1, e^{i\omega_1})\ (s'_2, e^{i\omega_2}) = (s'_1\ s''_2, e^{i(\omega_1+\omega_2)})$ où on a posé

$$s''_2 = \begin{pmatrix} e^{i\omega_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} s'_2 \begin{pmatrix} e^{-i\omega_1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

en faisant correspondre au couple $(s', e^{i\omega})$ l'élément $s' \begin{pmatrix} e^{i\omega} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de U(2). La correspondance entre ces deux réalisations du produit semi-direct est l'isomorphisme suivant :

$$(s, e^{i\omega}) \rightsquigarrow (s', e^{i\omega}) \text{ où } s' = s \begin{pmatrix} e^{-i\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{i\omega/2} \end{pmatrix} (-1)^{[\omega/2\pi]} .$$

Comme

$$U(1) \approx \frac{U(1)}{\mathbf{Z}_2},$$

par

$$e^{i\omega} \leftrightarrow \pm\, e^{i\omega/2},$$

on peut encore écrire tout ce qui précède sous la forme d'extension de $\frac{U(1)}{\mathbf{Z}_2}$ par SU(2).

Etude du produit direct $SU(2) \times U(1)$. La loi du produit sur les couples $(s, e^{i\omega})$ est

$$(s_1, e^{i\omega_1})\ (s_2, e^{i\omega_2}) = (s_1\ s_2, e^{i(\omega_1+\omega_2)}) .$$

Nous allons voir que $SU(2) \times U(1)$ est une extension de U(2) par $\mathbf{Z}_2$, que nous noterons $U(2) * \mathbf{Z}_2$ (ce n'est pas le produit direct), le produit étant défini sur les couples $((-1)^\eta, u)$ $(u \in U(2))$ par :

$$((-1)^{\eta_1}, u_1)\ ((-1)^{\eta_2}, u_2) = ((-1)^{\eta_1+\eta_2+\varepsilon(\omega_1,\omega_2)}, u_1\ u_2)$$

où on a posé

$$\text{dét } u_1 = e^{i\omega_1}, \text{ dét } u_2 = e^{i\omega_2} .$$

En effet, $\varepsilon(\omega_1, \omega_2) = \varepsilon'(\text{dét } u_1, \text{ dét } u_2)$ est un cocycle non trivial de la cohomologie $H^2(U(2), \mathbf{Z}_2)$ (où U(2) opère trivialement sur $\mathbf{Z}_2$), pour la même raison que dans le cas de U(1). Remarquons à ce propos que la suite exacte : $1 \to SU(2) \to U(2) \to U(1) \to 1$ donne la suite exacte :

$$0 \to \mathrm{Hom}\,(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_2) = 0 \to \mathrm{Hom}\,(\mathrm{U}(2), \mathbf{Z}_2) = 0 \to \mathrm{Hom}\,(\mathrm{SU}(2), \mathbf{Z}_2) =$$
$$= 0 \xrightarrow{d} H^2(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_2) = \mathbf{Z}_2 \to H^2(\mathrm{U}(2), \mathbf{Z}_2) \to H^2(\mathrm{SU}(2), \mathbf{Z}_2) \to 0 =$$
$$= H^3(\mathrm{U}(1), \mathbf{Z}_2)\,,$$

ce qui nous montre que l'image de $\varepsilon'(\text{dét } u_1, \text{ dét } u_2)$ dans $H^2(\mathrm{SU}(2), \mathbf{Z}_2)$ est 0. En outre, les applications :

$$(s, e^{i\omega}) \rightsquigarrow ((-1)^{[\omega/\pi]}, s \otimes e^{i\omega})$$
$$((-1)^{\eta}, u) \rightsquigarrow ((-1)^{\eta} s, (-1)^{[\omega/2\pi]+\eta} e^{i\omega/2}), \text{ où dét } u = e^{i\omega},$$

et

$$s = u \otimes (-1)^{[\omega/2\pi]} e^{-i\omega/2}\,,$$

sont des isomorphismes réciproques entre $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$ et $\mathrm{U}(2) * \mathbf{Z}_2$ car :

$$((-1)^{\eta_1+\eta_2+\varepsilon(\omega_1,\omega_2)}, u_1\, u_2) \to (s_1\, s_2 (-1)^{\eta_1+\eta_2}\,,$$
$$(-1)^{[\omega_1/2\pi]+[\omega_2/2\pi]+\eta_1+\eta_2} e^{i(\omega_1+\omega_2)/2}).$$

D'où le résultat annoncé.

Cette extension peut aussi se représenter avec le produit :

$$(s'_1, e^{i\omega_1})\,(s'_2, e^{i\omega_2}) = ((-1)^{\varepsilon(\omega_1,\omega_2)}\, s'_1\, s'_2, e^{i(\omega_1+\omega_2)})$$

car

$$(s', e^{i\omega}) \rightsquigarrow \left((-1)^{[\omega/2\pi]}\, s' \begin{pmatrix} e^{i\omega/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\omega/2} \end{pmatrix}, e^{i\omega}\right)$$

est un isomorphisme entre cette extension et $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$; si, dans le 2e terme, on remplace $e^{i\omega}$ par $\pm e^{i\omega/2}$, on aura l'isomorphisme avec

$$\mathrm{SU}(2) \times \frac{\mathrm{U}(1)}{\mathbf{Z}_2}\,.$$

Remarquons que, dans $\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$, $\mathbf{Z}_2$ est un sous-groupe normal, et ce que l'on vient de voir montre que

$$\mathrm{U}(2) \approx \frac{\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)}{\mathbf{Z}_2}\,.$$

5. Extensions du groupe de Poincaré et de son recouvrement universel.

PROPOSITION. *Toute extension du groupe de Poincaré* $\mathbf{P}$ *ou de son recouvrement universel* $\tilde{\mathbf{P}}$ *par un groupe analytique* $\mathbf{X}$, *dont l'algèbre de Lie* $\mathfrak{X}$ *est sans dérivation extérieure, est centrale* (*et donc triviale pour ce qui est de* $\tilde{\mathbf{P}}$).

En effet, la condition sur $\mathfrak{X}$ implique que Int ($\mathfrak{X}$) est la composante connexe de l'unité de Aut ($\mathfrak{X}$). Par conséquent, $\frac{\text{Aut}(\mathfrak{X})}{\text{Int}(\mathfrak{X})}$ est totalement discontinu, et il en est de même de $\frac{\text{Aut}(\mathbf{X})}{\text{Int}(\mathbf{X})}$ (même si **X** n'est pas simplement connexe).

Or, comme SL(2, **C**) n'est pas sous-groupe normal de **P**, et n'est pas non plus contenu dans un sous-groupe normal de $\tilde{\mathbf{P}}$ (autre que $\tilde{\mathbf{P}}$ lui-même), tout homomorphisme non trivial de $\tilde{\mathbf{P}}$ doit avoir une restriction non triviale à SL(2, **C**). Mais la seule image homomorphe de SL(2, **C**), autre que lui-même et l'identité, est **L**. Donc tout homomorphisme de $\tilde{\mathbf{P}}$ dans un groupe totalement discontinu (homomorphisme algébrique, s'entend) est trivial. Il en est de même pour **P** (pour la même raison). Remarquons à ce propos que ce résultat n'est plus vrai pour $\mathbf{L}_c$ ou O(3, 1), ni pour SO(3, 1).

Soit donc une extension $1 \to \mathbf{X} \to \mathbf{G} \to \mathbf{P} \to 1$; si cette extension est topologique, ou seulement si **G** est un groupe de Lie, l'homomorphisme $\mathbf{P} \to \frac{\text{Aut}_a(\mathbf{X})}{\text{Int}(\mathbf{X})}$ qui lui correspond a son image dans $\frac{\text{Aut}(X)}{\text{Int}(X)}$, qui est totalement discontinu ; donc il est trivial, et l'extension est centrale. Le même résultat est valable pour $\tilde{\mathbf{P}}$. Dans ce cas, d'après un résultat de Michel ([22]), l'extension est triviale.

Remarque. Il est vraisemblable que Int ($\mathscr{P}$) = $Ad\ \mathbf{P}$ est un sous-groupe fermé de GL(10, **R**). Si cela est, $\frac{\text{Aut}(\mathscr{P})}{\text{Int}(\mathscr{P})}$ sera un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\frac{\text{Dér}(\mathscr{P})}{\text{Dér}_{\text{int}}(\mathscr{P})} \approx \mathfrak{u}(1)$ (donc qui sera sans doute isomorphe à **R**), et si **X** est alors un groupe analytique non homomorphe à $\frac{\text{Aut}(\mathscr{P})}{\text{Int}(\mathscr{P})}$, toute extension topologique de **X** par $\tilde{\mathbf{P}}$ est centrale.

En outre (moyennant toujours la conjecture sur Int ($\mathscr{P}$)) si on a une extension de **X**, tel que $\mathfrak{X} = [\mathfrak{X}, \mathfrak{X}]$, par $\tilde{\mathbf{P}}$, extension telle que l'homomorphisme $\mathbf{X} \to \frac{\text{Aut}(\tilde{\mathbf{P}})}{\text{Int}(\mathbf{P})}$ qu'elle définit soit un homomorphisme analytique, la différentielle de ce dernier homomorphisme devant être l'homomorphisme (trivial d'après ce qu'on a vu) $\mathfrak{X} \to \frac{\text{Dér}(\mathscr{P})}{\text{Dér}_{\text{int}}(\mathscr{P})} \approx \mathfrak{u}(1)$, son image sera totalement discontinue. Si alors **X** n'est pas homomorphe à un groupe totalement discontinu, l'extension considérée de **X** par $\tilde{\mathbf{P}}$ sera triviale.

Il est donc intéressant d'étudier la nature topologique du sous-groupe $Ad\,\mathbf{P}$ de Aut ($\mathscr{P}$), et aussi de voir à quelles conditions l'homomorphisme défini par une extension de groupes analytiques est un homomorphisme analytique.

6. Extensions de groupes de Lie et extensions d'algèbres de Lie. Par analogie avec le cas des groupes abstraits, il se pose le problème d'étudier (directement si possible) le lien entre les homomorphismes distincts

$$\overline{\varphi} : \mathfrak{b} \to \frac{\text{Dér}\,(\mathfrak{a})}{\text{Dér}_{\text{int}}\,(\mathfrak{a})}$$

et les extensions inéquivalentes (et particulièrement les extensions inessentielles) de l'algèbre de Lie $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{a}$. On sait déjà que si $\overline{\varphi} = 0$ et si le centre de $\mathfrak{a}$ est nul, l'extension supposée inessentielle est équivalente à l'extension triviale. Pour pousser plus avant l'étude, on est tenté de passer par l'intermédiaire des groupes de Lie correspondants. Il se posera alors le problème de savoir si Int $(\mathfrak{a})$ est un sous-groupe fermé de Aut $(\mathfrak{a})$: on sait que ce n'est pas toujours le cas (cf. contre exemple dans ([12]), par exemple ; on en aura un autre avec l'algèbre réelle correspondant à l'algèbre résoluble complexe de dimension 3 et de relations de commutation $[a_1, a_2] = i\alpha a_2$, $[a_1, a_3] = i\beta a_3$, et $[a_2, a_3] = 0$, avec α/β irrationnel). Mais il se posera aussi le problème de savoir quand une extension d'algèbres est la « différentielle » d'une extension de groupes, c'est-à-dire quand il existe une suite exacte de groupes analytiques $1 \to A \xrightarrow{\Lambda} F \xrightarrow{M} B \to 1$ dont la suite exacte donnée $0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{f} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b} \to 0$ est la différentielle (i.e. $d\Lambda = \lambda$, $DM = \mu$), et aussi, si on a le relèvement $\mathfrak{b} \xrightarrow{\nu} \mathfrak{f}$, correspondant à une extension inessentielle, quand on peut trouver un relèvement $N : B \to F$ de M, tel que $DN = \nu$. En outre, il se posera encore le problème de savoir quand l'homomorphisme $B \to \dfrac{\text{Aut}\,(A)}{\text{Int}\,(A)}$ (algébrique *a priori*) est un homomorphisme analytique — ce qui exige évidemment que Int (A) soit fermé dans Aut (A), donc Int $(\mathfrak{a})$ fermé dans Aut $(\mathfrak{a})$. Ces problèmes semblent assez ardus, et il n'entre pas dans notre propos de les résoudre ici. Remarquons simplement une chose.

Soit une extension $0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{f} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b} \to 0$. Notons A, F, B les groupes de Lie (réels) connexes et simplement connexes correspondant à $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{b}$ (respectivement). Il existe alors des homomorphismes analytiques Λ, M, $\Lambda : A \to F$ et $M : F \to B$, tels que $d\Lambda = \lambda$, $dM = \mu$. λ étant injective, Λ est une immersion (de variétés analytiques) et son noyau ker Λ est discret (on retrouve aisément ce dernier résultat à l'aide des coordonnées canoniques de première espèce, en montrant qu'il existe un voisinage U de 1 dans A tel que ker $\Lambda \cap U = \{ 1 \}$). $\mu = DM$ étant surjective, M est une submersion et, $M(F)$ étant un sous-groupe ouvert de B, c'est tout B (car B est connexe), donc M est surjective (ce que l'on retrouve en écrivant tout $f \in F$ comme $f = \prod_j \exp \gamma_j$, produit fini, avec γ_j dans un voisinage de 0 dans $\mathfrak{f}$). De plus, ker $M = \text{Im}\,\Lambda$; soit en effet $f \in F$ tel que $M(f) = 1$; écrivons-le $f = \prod \exp \gamma_j$. On a alors $M(f) = \prod \exp \mu(\gamma_j) = 1$. F et B étant simplement connexes, on peut définir la « courbe » reliant f à 1 de telle sorte que $f = \prod_j \exp \gamma'_j$

avec $\mu(\gamma'_j) = 0$, donc $\gamma'_j = \lambda(\alpha_j)$ pour un certain $\alpha_j \in \mathfrak{a}$, d'où $f = \prod_j \exp \gamma(\alpha_j) = A\left(\prod_j \exp \alpha_j\right)$. Donc $\ker M \subset \operatorname{Im} A$. En outre si $f \in \operatorname{Im} A$, $f = A(a)$; écrivons alors $a = \pi \exp \alpha_j$; il vient $f = \prod \exp \lambda(\alpha_j)$, d'où $M(f) = \prod \exp \mu(\lambda(\alpha_j)) = 1$. D'où $\ker M \supset \operatorname{Im} A$. D'où l'exactitude de la suite $A \xrightarrow{A} F \xrightarrow{M} B \to 1$ en F : le passage des algèbres de Lie aux groupes de Lie connexes et simplement connexes est ainsi fonctoriel et exact ; en effet, on a vu que toute suite exacte $0 \to \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{f} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b} \to 0$ est la « différentielle » d'une suite exacte $1 \to A/\ker A \xrightarrow{\bar{A}} F \xrightarrow{M} B \to 1$, où A, F, B sont connexes et simplement connexes, et donc $\ker A = 0$.

7. Extension et restriction du corps de base, pour une algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie sur $\mathbf{R}$, ou plus généralement sur un anneau K (commutatif à élément unité) dans lequel 2 est inversible. Sur le module $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$, on définit une structure d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}'$ sur K (on vérifie aisément l'identité de Jacobi) par la formule :

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, y_1] + [x_2, y_2], [x_1, y_2] + [x_2, y_1]) .$$

Soit k un élément algébrique d'ordre 2 sur K, c'est-à-dire $k \notin K$ et $k^2 = 1$. Notons $K[k]$ l'anneau commutatif, extension quadratique de K, de base 1 et k. Les éléments de la forme $\{(x, x)\}$ et $\{(x, -x)\}$ forment deux idéaux supplémentaires $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{e}'$ de $\mathfrak{a}'$, chacun étant de plus isomorphe à $\mathfrak{a}$ par $x \rightsquigarrow \frac{1}{2}(x, x)$ et $\frac{1}{2}(x, -x)$ (respectivement) car

$$(x_1, x_2) = \tfrac{1}{2}(x_1 + x_2, x_1 + x_2) + \tfrac{1}{2}(x_1 - x_2, x_2 - x_1)$$

et car

$$[(x, x), (x', -x')] = (0, 0) .$$

Ainsi, $\mathfrak{a}'$ s'obtient à partir de $\mathfrak{a}$ par extension à $K[k]$ de l'anneau des scalaires, puis restriction à K, $\mathfrak{e}$ et $\mathfrak{e}'$ provenant, dans cette dernière opération, de $\frac{1}{2}(1 + k)\,\mathfrak{a}$ et $\frac{1}{2}(1 - k)\mathfrak{a}$ (respectivement), leur orthogonalité étant due à ce que $(1 + k)(1 - k) = 0$, et le fait que ce sont des idéaux à l'idempotence de $\frac{1}{2}(1 + k)$ et de $\frac{1}{2}(1 - k)$.

Soit alors $\mathfrak{a}$ une algèbre de Lie sur $\mathbf{R}$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_{(\mathbf{C})|\mathbf{R}}$ l'algèbre obtenue par extension du corps des scalaires à $\mathbf{C}$, puis restriction à $\mathbf{R}$. Notons $\mathfrak{a}''$ l'algèbre de Lie réelle définie sur le module (espace vectoriel en fait) $\mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ par le crochet :

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, y_1] - [x_2, y_2], [x_1, y_2] + [x_2, y_1]) .$$

L'application $(x_1, x_2) \to (x_1, ix_2)$ est alors un isomorphisme $\mathfrak{a}'_{(\mathbf{C})} \to \mathfrak{a}''_{(\mathbf{C})}$. Or, si $x \in \mathfrak{a}$, $ix \in \mathfrak{a}_{(\mathbf{C})}$, et l'application $(x_1, x_2) \to x_1 + ix_2$ est un isomorphisme $\mathfrak{a}'' \to \mathfrak{b}$. Donc $\mathfrak{a}'_{(\mathbf{C})} \approx \mathfrak{b}_{(\mathbf{C})}$, et $\mathfrak{b}_{(\mathbf{C})}$ est ainsi somme directe de deux idéaux $\mathfrak{e}_{(\mathbf{C})}$ et $\mathfrak{e}'_{(\mathbf{C})}$, chacun d'eux étant isomorphe à $\mathfrak{a}_{(\mathbf{C})}$; plus précisément,

on pourra écrire $\mathfrak{b}_{(\mathbf{C})} \approx \frac{1}{2}(1 + k)\,\mathfrak{a}_{(\mathbf{C})} \oplus \frac{1}{2}(1 - k)\,\mathfrak{a}_{(\mathbf{C})}$, d'où l'on déduit $\mathfrak{b}_{(\mathbf{C})|\mathbf{R}} \approx \frac{1}{2}(1 + k)\,\mathfrak{b} \oplus \frac{1}{2}(1 - k)\,\mathfrak{b}$ (où k représente un élément algébrique d'ordre 2 sur $\mathbf{R}$; cf. Bourbaki ([12]), § 1, exerc. 4).

En appliquant à £, qui, on le sait, est $\mathfrak{a}_{(\mathbf{C})|\mathbf{R}}$, où $\mathfrak{a}$ représente une algèbre simple d'ordre 3, soit $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ ou $\mathfrak{so}(3) \approx \mathfrak{su}(2)$ on aura :

$$£_{(\mathbf{C})} \approx \tfrac{1}{2}(1 + k)\,\mathfrak{a}_{(\mathbf{C})} \oplus \tfrac{1}{2}(1 - k)\,\mathfrak{a}_{(\mathbf{C})}$$

et par conséquent $£_{(\mathbf{C})|\mathbf{R}} \approx £ \oplus £$; on obtiendrait le même résultat par extension quadratique (avec k tel que $k^2 = 1$) du corps de base, puis restriction à $\mathbf{R}$ de l'anneau des scalaires.

Dans le cas de $\mathscr{P}$, qui ne s'obtient pas par extension à $\mathbf{C}$ puis restriction à $\mathbf{R}$ des scalaires, à partir d'une algèbre de dimension 5, si l'on obtient encore $\frac{1}{2}(1 + k)\,\mathscr{P} \oplus \frac{1}{2}(1 - k)\,\mathscr{P}$ par extension quadratique (avec $k^2 = 1$) puis restriction à $\mathbf{R}$ des scalaires, on n'aura pas la même chose par extension à $\mathbf{C}$ (on rajoute i, avec $i^2 = -1$) puis restriction à $\mathbf{R}$ des scalaires (l'algèbre obtenue contenant cependant une sous-algèbre isomorphe à £ ⊕ £) : l'algèbre obtenue possède en effet une structure complexe (cf. chap. 1), mais n'est pas somme directe de deux idéaux orthogonaux.

Remarque. Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie réelle, $\mathfrak{a}_{(\mathbf{C})|\mathbf{R}} = \mathfrak{a} \otimes \mathbf{C}$ est l'algèbre réelle obtenue en définissant sur le module $\mathfrak{a} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ le crochet par

$$[a, ia']_{\mathfrak{a}\otimes\mathbf{C}} = i[a, a']_{\mathfrak{a}},\ [ia, ia']_{\mathfrak{a}\otimes\mathbf{C}} = -[a, a']_{\mathfrak{a}},\ [a, a']_{\mathfrak{a}\otimes\mathbf{C}} = [a, a']_{\mathfrak{a}}$$

($a, a' \in \mathfrak{a}$), où l'on note ia pour $a \otimes i$.

C) UNIFICATION D'ALGÈBRES DE LIE

Nous avons vu que la théorie des extensions d'algèbres de Lie ne peut nous donner le lien cherché entre l'algèbre externe $\mathscr{P}$, et une algèbre interne semi-simple $\mathfrak{X}$. Pour ce qui est des extensions de groupes, celles de $\mathbf{P}$ par $\mathbf{X}$ étant centrales, tout ce que l'on peut en attendre est (de même que dans le cas de SU(2) et U(1), comme on le verra au chapitre III) certaines relations de phase : les extensions de groupes de Lie (où les flèches sont des morphismes analytiques) donnant par passage aux « différentielles » des extensions de leurs algèbres, lesquelles sont triviales (comme on l'a vu), les relations que l'on obtiendra d'une extension non triviale des groupes (s'il en existe — ce n'est pas le cas de $\tilde{\mathbf{P}}$ par $\mathbf{X}$ —) seront nécessairement de type discret, et on ne peut en tout cas pas s'attendre à une formule de masse reliant m^2 aux nombres quantiques « internes ».

Une autre possibilité consiste à étendre aux complexes le corps des scalaires de $\mathscr{P}$, puis à se restreindre à $\mathbf{R}$: on obtient l'algèbre $\mathscr{P} \otimes \mathbf{C}$, dans laquelle $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu$ n'est plus un invariant [il faut en effet considérer $g^{\mu\nu}$ $(p_\mu + ip_\mu)\,(p_\nu + ip_\nu)$, où ip_μ désigne l'élément $p_\mu \otimes i$ de $\mathscr{P} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$, d'où,

en posant $ip_\mu = q_\mu$, les invariants $g^{\mu\nu}\ (p_\mu p_\nu - q_\mu q_\nu)$ et $g^{\mu\nu} p_\mu q_\nu$]. On aura alors une « correction » à $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$: dans $\mathscr{P} \otimes \mathbf{C}$, on aura la relation $m^2 = I + m'^2$, où I est un invariant et

$$m'^2 = - g^{\mu\nu} q_\mu q_\nu \ (m^2 = - g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu) ;$$

m'^2 joue ainsi le rôle d'une « correction de masse », née de la complexification. Mais on ne voit pas très bien, dans une telle hypothèse, quelle est l'algèbre « interne » et par conséquent comment exprimer m^2 à l'aide de « nombres quantiques internes ».

1. La solution la plus naturelle — et qui, contrairement aux extensions, est symétrique — semble donc être de trouver une algèbre de Lie contenant à la fois $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{X}$ comme sous-algèbres. Sous cette forme, le problème (étudié par divers auteurs, et notamment Gardiner ([18])) est hautement indéterminé, et on ne peut pas en tirer des critères pour l'algèbre $\mathfrak{X}$, puisqu'il est toujours possible de plonger $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{X}$ dans une autre algèbre, d'ordre suffisamment élevé (et même de le faire de façon à ce que $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{X}$ ne commutent pas). On ne peut espérer obtenir des conditions sur $\mathfrak{X}$ qu'en imposant certaines conditions de minimalité à l'algèbre devant contenir $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{X}$. Par ailleurs, si l'algèbre contenant $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{X}$ est par trop grande, il se posera la question de savoir quelle signification physique attacher aux « générateurs superflus » (ceux d'un sous-espace supplémentaire des sous-espaces $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{X}$).

Nonobstant (ou ignorant peut-être) les résultats que nous avions annoncés dès mai 1964 (à Marseille et à Turin ; cf. ([15])), et qui contenaient l'essentiel des résultats de cette partie, les premiers résultats publiés dans cette voie étaient négatifs (cf. Mac-Glinn ([20]), et aussi ([23])). Dans les tentatives de ce genre, on supposait que l'on a une algèbre de Lie dont l'espace vectoriel sous-jacent est la somme directe de ceux de $\mathscr{P}$ (de générateurs $M_{\mu\nu}$ et p_μ) et d'une algèbre de Lie semi-simple $\mathfrak{X}$ (de générateurs X_α), et l'on supposait que l'on cherche à définir le crochet entre $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{X}$ avec l'hypothèse que $[\mathfrak{L}, \mathfrak{X}] = 0$, soit $[M_{\mu\nu}, X_\alpha] = 0\ \forall\mu, \nu$, et α, ou (cf. ([23])) avec une hypothèse en apparence plus faible, mais en fait équivalente ($[M_{\mu\nu}, X_\alpha] = 0, \forall\alpha$, pour un certain $M_{\mu\nu}$). Un calcul portant sur les constantes de structure (éventuellement simplifiées, en faisant usage d'une base de Weyl de $\mathfrak{X}$ — usage qui est assez délicat lorsqu'il s'agit d'algèbres de Lie réelles, indispensables si l'on veut faire intervenir des considérations topologiques sur les groupes de Lie correspondants) montre alors que $[\mathscr{P}, \mathfrak{X}] = 0$. Nous allons donner ici une démonstration simple de ce résultat, dans une hypothèse un peu plus générale.

Lemme. *Soit $\mathfrak{X}$ une algèbre de Lie semi-simple (de dimension finie sur un corps commutatif de caractéristique nulle, **R** par exemple), et supposons qu'il existe des isomorphismes de $\mathscr{P}$ et de $\mathfrak{X}$ dans une algèbre de Lie $\mathscr{R}$, soit φ et ψ (respectivement) tels que $\mathscr{R} = \varphi(\mathscr{P}) + \psi(\mathfrak{X})$, somme non néces-*

sairement directe d'espaces vectoriels, et que $[\varphi(\mathfrak{L}), \psi(\mathfrak{X})] = 0$; *alors* $\varphi(\mathscr{P}) \cap \psi(\mathfrak{X}) = \{0\}$ *et* $\mathscr{R} \approx \mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$.

Ici, $\mathfrak{L}$ désigne une sous-algèbre de Levi de $\mathscr{P}$ (on peut toujours choisir une base $(M_{\mu\nu}, p_\mu)$ de $\mathscr{P}$ telle qu'alors $\mathfrak{L}$ soit engendrée par les $M_{\mu\nu}$, avec les relations de commutation classiques). En effet, tout élément de $\varphi(\mathscr{P}) \cap \psi(\mathfrak{X})$ doit commuter avec tout $\varphi(\mathfrak{L})$; or il n'existe pas dans $\mathscr{P}$ d'élément non nul commutant avec tout $\mathfrak{L}$. Donc $\varphi(\mathscr{P}) \cap \psi(\mathfrak{X}) = \{0\}$, et la somme d'espaces vectoriels est directe. Or $\forall p_0 \in \mathscr{P}_0$, on peut trouver $l \in \mathfrak{L}$ et $p'_0 \in \mathscr{P}_0$ (non uniques, mais peu importe) tels que $p_0 = [l, p'_0]$; il suffit en effet de vérifier ceci sur une base (p_μ) de $\mathscr{P}_0$, et le tableau des relations de commutation de $\mathscr{P}$, donné en appendice au chapitre I, le montre immédiatement — on a $p_\mu = [M_{\mu\nu}, -g_{\mu\rho} p_\rho]$. D'où :

$$[\psi(x), \varphi(p_0)] = [\psi(x), \varphi([l, p'_0])] =$$

$$= [[\psi(x), \varphi(l)], \varphi(p'_0)] + [\varphi(l), [\psi(x), \varphi(p'_0)]]$$

pour tout $x \in \mathfrak{X}$, d'après l'identité de Jacobi. Si alors on écrit :

$$[\psi(x), \varphi(p_0)] = \psi(x_1) + \varphi(p), [\psi(x), \varphi(p'_0)] = \psi(x'_1) + \varphi(p'),$$

il vient (comme $[\psi(x), \varphi(l)] = 0$ par hypothèse) $x_1 = 0$, $\forall x$ et p_0 ; il en résulte que $[\psi(\mathfrak{X}), \varphi(\mathscr{P})] \subset \varphi(\mathscr{P})$, donc que $\varphi(\mathscr{P})$ est un idéal de $\mathscr{R}$, donc que $\mathscr{R}$ est extension de $\mathfrak{X}$ par $\mathscr{P}$, et d'après les résultats de la première partie [ou par une démonstration directe, utilisant le théorème de Levi-Malcev, lequel montre que $\mathscr{R}$ a pour sous-algèbre de Levi $\varphi(\mathfrak{L}) \oplus \psi(\mathfrak{X})$, et le fait que $\mathfrak{gl}(4, \mathbf{R}) = \mathfrak{sl}(4, \mathbf{R}) \oplus \mathfrak{u}(1)$ ne contient pas de sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{X}$ quelle que soit $\mathfrak{X}$ semi-simple, ce qui prouve que l'homomorphisme $\varphi(\mathfrak{L}) \oplus \psi(\mathfrak{X}) \to \text{Dér}\,(\varphi(\mathscr{P}_0)) = \mathfrak{gl}(4, \mathbf{R})$ définissant le produit semi-direct $(\varphi(\mathfrak{L}) \oplus \psi(\mathfrak{X}))$. $\varphi(\mathscr{P}_0)$ et coincidant avec D_N sur $\varphi(\mathfrak{L})$ — pour obtenir $\varphi(\mathscr{P})$ — est trivial sur $\psi(\mathfrak{X})$, on voit que $\mathscr{R} = \varphi(\mathscr{P}) \oplus \psi(\mathfrak{X})$ soit $\mathscr{R} \approx \mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$.

On aura le même résultat si l'on suppose que $\mathscr{R} = \varphi(\mathscr{P}) + \psi(\mathfrak{X})$, somme directe d'espaces vectoriels, et que $[\psi(\mathfrak{X}), \varphi(l_1)] = 0$ pour un certain $l_1 \in \mathfrak{L}$, en montrant (de même) que $\mathscr{R}$ est une extension de $\mathfrak{X}$ par $\mathscr{P}$. Nous allons voir cependant que ce résultat, obtenu avec des hypothèses très restrictives, n'est pas un phénomène général. Nous introduisons pour cela une définition (cf. ([16])).

2. Définition des algèbres unifiantes. Soient $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ n algèbres de dimension finie sur un même corps commutatif. On dira qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ est *algèbre unifiante* de $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ s'il existe des isomorphismes λ_k de $\mathfrak{a}_k$ dans $\mathfrak{u}$ $(k = 1, \ldots, n)$ tels que $\mathfrak{u} = \lambda_1(\mathfrak{a}_1) + \cdots + \lambda_n(\mathfrak{a}_n)$, somme non nécessairement directe d'espaces vectoriels. On écrira $\mathfrak{u} = U(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$.

Cette définition appelle quelques remarques. Tout d'abord, précisons bien que l'on ne suppose pas que les espaces vectoriels sous-jacents aux algèbres

$\lambda_k(\mathfrak{a}_k)$ aient deux à deux une intersection réduite à $\{ 0 \}$. On parlera ainsi d'unification avec intersection (en précisant, si besoin est, quelles algèbres ont telle intersection, dans l'algèbre unifiante bien entendu) ou d'unification sans intersection. La notion de « minimalité » dont nous parlions plus haut est ici réalisée : on a en effet $\dim \mathfrak{u} \leqslant \dim \mathfrak{a}_1 + \cdots + \dim \mathfrak{a}_n$, l'égalité étant réalisée s'il y a unification sans intersection. Dans le cas d'intersection $\{ 0 \}$, il existe toujours une unification (triviale) : c'est la somme directe $\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$. Si l'on cherche une unification avec intersection différente de $\{ 0 \}$, l'existence d'une unification n'est pas certaine ; nous allons même voir bientôt que l'on peut exhiber un cas, assez élémentaire, où il n'existe pas d'unification.

Dans le cas de deux algèbres et d'unification sans intersection (c'est-à-dire avec intersection $\{ 0 \}$), on retrouve comme cas particulier la notion d'extension inessentielle (c'est le cas où une des algèbres est un idéal, dans l'unification).

Remarquons aussi que si deux algèbres sont plongées dans une algèbre de dimension supérieure, sans que ce soit une unification, on peut toujours considérer cette dernière comme unification des deux algèbres de départ et d'un nombre suffisamment grand d'algèbres monodimensionnelles (u(1)) ; de plus en fixant *a priori* ce nombre, nous pouvons préciser le degré de minimalité désiré.

Il est tout à fait banal de constater que toute algèbre peut être considérée comme unification d'elle-même et de n'importe laquelle de ses sous-algèbres. D'autre part, si deux algèbres ont un facteur direct en commun (c'est-à-dire contiennent en facteur direct deux algèbres isomorphes), leur produit direct, divisé par ce facteur direct, est une unification (qui semble assez triviale) avec intersection sur ce facteur direct, « mis en commun » en quelque sorte. Nous définirons donc ce que l'on entend par unification triviale et unification banale de deux algèbres de la façon suivante (la définition s'étendra aisément au cas de plusieurs algèbres) :

Définitions. i) On dit qu'une unification $\mathfrak{u} = U(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est *triviale* si, alors que $\mathfrak{a} \approx \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}'$, et $\mathfrak{b} \approx \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}'$, on a $\mathfrak{u} \approx \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}' \oplus \mathfrak{b}'$. De même, une unification de n algèbres de Lie sera dite triviale si elle est isomorphe à la somme directe de ces algèbres, à un facteur direct commun à deux ou plusieurs algèbres près (éventuellement).

ii) On dit qu'une unification $\mathfrak{u} = U(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ est *banale* si $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{u} \approx \mathfrak{a}$, (ou si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{u} \approx \mathfrak{b}$). De même, dans le cas de n algèbres, on dira qu'une unification est banale si une algèbre contient toutes les autres (à un facteur direct près, ou à une unification triviale près, éventuellement).

On a introduit la distinction entre unification triviale et unification banale pour la raison suivante : dans le cas d'une unification triviale, tout invariant d'une des algèbres est un invariant de l'unification. Dans le cas d'une unification banale, par exemple le cas $\mathfrak{u} \approx \mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$, un invariant de $\mathfrak{b}$ ne sera en général pas un invariant de $\mathfrak{u}$. En particulier, si on a une unification triviale

de $\mathscr{P}$ et d'autres algèbres, $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ sera un invariant de l'unification (ce que l'on ne veut pas), alors que si $\mathscr{P} \subset \mathfrak{X}$ et si l'on prend $\mathfrak{X}$ pour unification (par exemple, $\mathfrak{X} = \mathscr{S}$, algèbre de Lie du groupe conforme), $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ ne sera (en général) pas un invariant de $\mathfrak{X}$ (et ceci permet d'espérer que, pour un $\mathfrak{X}$ bien choisi, on aura une « formule de masse exacte »).

Nous allons voir maintenant, sur un exemple simple, que la notion d'unification est assez restrictive.

3. PROPOSITION. *Il n'existe pas d'algèbre unifiante* $U(\mathfrak{so}(3), \mathfrak{so}(3))$ *avec intersection monodimensionnelle.*

Notons en effet x_3 un générateur de l'intersection. En le multipliant au besoin par un même nombre, on peut toujours choisir une base (x_1, x_2, x_3) du premier $\mathfrak{so}(3)$ et une base (x'_1, x'_2, x_3) du deuxième $\mathfrak{so}(3)$ telles que

$$[x_i, x_j] = \varepsilon_{ijk} x_k \quad \text{et} \quad [x'_i, x'_j] = \varepsilon_{ijk} x'_k$$

(où on écrit $x'_3 = x_3$; $i, j, k = 1, 2, 3$). Cherchons alors à définir les relations de commutation de x_1, x_2 avec x'_1, x'_2. Posons pour cela

$$(*) \qquad [x_i, x'_j] = a_{ij} x_1 + b_{ij} x_2 + a'_{ij} x'_1 + b'_{ij} x'_2 + c_{ij} x_3 .$$

L'identité de Jacobi nous donne alors les $\binom{5}{3} - 2 = 8$ conditions suivantes :

$$(1) \qquad x_3(x_1 x'_1) = x_2 x'_1 + x_1 x'_2$$

$$(2) \qquad x_3(x_2 x'_2) = - x_1 x'_2 - x_2 x'_1$$

$$(3) \qquad x_3(x_1 x'_2) = x_2 x'_2 - x_1 x'_1$$

$$(4) \qquad x_3(x_2 x'_1) = - x_1 x'_1 + x_2 x'_2$$

$$(5) \qquad x_1(x_2 x'_2) = - x'_1 + x_2(x_1 x'_2)$$

$$(6) \qquad x_1(x_2 x'_1) = x'_2 + x_2(x_1 x'_1)$$

$$(7) \qquad x'_1(x_2 x'_2) = x_1 - (x_2 x'_1) x'_2$$

$$(8) \qquad x'_1(x_1 x'_2) = - x_2 - (x_1 x'_1) x'_2$$

(on a, pour simplifier les notations, « oublié » les crochets, convenant seulement que l'on effectue d'abord les produits — crochets — des termes entre parenthèses, si l'on a plusieurs produits successifs).

(1) + (2) donne $x_3(x_1 x'_1 + x_2 x'_2) = 0$, d'où $x_1 x'_1 + x_2 x'_2$ proportionnel à x_3.

(3) − (4) donne $x_3(x_1 x'_2 - x_2 x'_1) = 0$, d'où $x_1 x'_2 - x_2 x'_1$ proportionnel à x_3.

Ecrivons alors (1), (2), (3), (4) à l'aide des relations (*), et identifions les coefficients. Il vient :

$$-b_{11} = b_{22} = a_{12} + a_{21} \quad \text{et} \quad a_{12} = a_{21} = b_{22} - b_{11},$$

et de même

$$a_{11} = -a_{22} = b_{12} + b_{21} \quad \text{et} \quad b_{12} = b_{21} = a_{11} - a_{22}.$$

Il en résulte

$$a_{11} = a_{22} = b_{12} = b_{21} = 0 \quad \text{et} \quad b_{11} = b_{21} = a_{21} = a_{12} = 0.$$

De plus, on a $c_{11} = c_{22}$ et $c_{12} = -c_{21}$ (d'où $x_1 x'_1 + x_2 x'_2 = 2 c_{11} x_3$, et $x_1 x'_2 - x_2 x'_1 = 2 c_{12} x_3$). De même, on aura $a'_{11} = a'_{22} = b'_{12} = b'_{21} = 0$ et $b'_{11} = b'_{22} = a'_{21} = a'_{12} = 0$.

Les relations (1), (2), (3), (4) entraînent donc $x_1 x'_1 = x_2 x'_2 = c_{11} x_3$ et $x_1 x'_2 = -x_2 x'_1 = c_{12} x_3$. (5) s'écrit alors $-c_{11} x_2 = -x'_1 + c_{12} x_1$, ce qui est impossible (et (6), (7), (8), donnent des relations du même type). D'où le résultat annoncé : il est impossible de construire une algèbre de Lie ayant les propriétés voulues.

Plus généralement, si l'on cherche à déterminer les constantes de structure encore inconnues pour une unification déterminée (c'est-à-dire si l'on cherche une unification de telles et telles algèbres, avec telles et telles intersections), on s'aperçoit que les relations que l'on tire de l'identité de Jacobi, relations qui sont, dans le cas général, quadratiques ès constantes de structure à déterminer, sont en nombre bien plus grand que ces constantes elles-mêmes. Par conséquent, l'existence d'une algèbre unifiante (non triviale, bien sûr) d'algèbres données est un phénomène assez rare. Dans cet esprit, nous pouvons compléter le résultat précédent :

PROPOSITION. *Il n'existe pas d'algèbre unifiante* $U(\mathfrak{so}(3), \mathfrak{so}(3))$ *distincte de la somme directe* $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ *et de* $\mathfrak{so}(3)$ *elle-même.*

Comme il n'existe pas de sous-algèbre de dimension 2 de $\mathfrak{so}(3)$, l'intersection d'une unification doit être de dimension 3 (l'unification est alors $\mathfrak{so}(3)$) ou 0, en vertu du résultat précédent. Si elle est de dimension 0, et si l'unification u n'est pas la somme directe, la sous-algèbre de Levi de l'unification est nécessairement isomorphe à $\mathfrak{so}(3)$: en effet, les algèbres semi-simples de dimension $\leqslant 6$ sont $\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, et £ ; et on vérifie aisément que £ n'est pas un u cherché (£ ne peut pas être somme de deux sous-algèbres isomorphes à $\mathfrak{so}(3)$) — non plus que les autres de dimension 6, hormis la somme directe. La seule possibilité d'avoir u distincte de la somme directe de et $\mathfrak{so}(3)$ est donc d'avoir $u \approx \mathfrak{so}(3)$. p, où p est une algèbre résoluble (de dimension 3) ; or on doit avoir un produit semi-direct non direct, donc, comme il s'agit d'algèbres réelles, l'homomorphisme le définissant doit être une représentation (réelle)

de dimension 3 de $\mathfrak{so}(3)$: celle-ci étant irréductible, et son image étant une sous-algèbre maximale de $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$, l'idéal p doit être commutatif (un calcul direct immédiat le montre d'ailleurs). u doit donc être isomorphe à l'algèbre du groupe inhomogène des rotations (dont on peut prendre pour base les générateurs a_k et p_k, $k = 1, 2, 3$, de $\mathscr{P}$:

$$[a_i, a_j] = \varepsilon_{ijk}\, a_k,\ [a_i, p_j] = \varepsilon_{ijk}\, p_k,\ [p_j, p_k] = 0).$$

Un des $\mathfrak{so}(3)$ de u sera alors la sous-algèbre de Levi engendrée par les a_k, et l'autre devra être transformé de celui-ci dans un automorphisme spécial $e^{ad p_0} = (I + ad p_0)$, où $p_0 \in \mathfrak{p}$, soit

$$p_0 = -\sum_{k=1}^{3} \lambda_k\, p_k\,,$$

et aura donc une base (a'_k) avec $a'_i = a_i + \lambda_j\, p_k - \lambda_k\, p_j$ (i, j, k cycliques ici). Mais on voit que

$$\sum_{1}^{3} \lambda_k\, a_k = \sum_{1}^{3} \lambda_k\, a'_k\,,$$

d'où intersection de dimension 1, et cette dernière possibilité tombe (on ne peut la considérer que comme $U(\mathfrak{so}(3), \mathfrak{so}(3), \mathfrak{u}(1))$ avec intersection de dimension 1). Q. E. D.

4. Il pourrait sembler que la notion que nous venons d'introduire est trop restrictive, et que les résultats sont trop souvent triviaux. Nous allons voir que ce n'est pas le cas ; mais auparavant, construisons un exemple positif.

Exemple d'une algèbre unifiante $U(\mathscr{P}, \mathfrak{L}, \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1))$ non triviale et non banale, avec intersection de dimension 2.

[Nous construirons plus loin des unifications $U(\mathscr{P}, \mathfrak{L})$ avec une telle intersection]. Considérons pour cela le produit semi-direct $\mathscr{R} = \mathfrak{L}.\mathscr{R}_0$ où $\mathscr{R}_0$ est un idéal commutatif de dimension 10, et où l'homomorphisme $\varphi : \mathfrak{L} \to \mathfrak{gl}(10, \mathbf{R}) = \text{Dér}\,(\mathscr{R}_0)$ qui le définit est $\varphi = D_N \oplus ad$, où D_N désigne la représentation « de Naïmark » de $\mathfrak{L}$ et ad la représentation adjointe (en dimension 6), $\mathfrak{L}$ étant rapportée à la base (a_k, b_k) — voir en appendice la forme explicite de ces représentations. Notons (q_k, q'_k) une base de l'espace de la représentation ad, et (p_k, p_4) une base de celui de la représentation D_N : on peut considérer $(p_k, p_4\ ;\ q_k, q'_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ comme base de $\mathscr{R}_0$. En notant $\mathscr{P}_0$ le sous-espace de $\mathscr{R}_0$ engendré par les (p_k, p_4), on voit que $\mathscr{R} \supset \mathfrak{L}.\mathscr{P}_0 \approx \mathscr{P}$. Les relations de commutation de $\mathscr{R}$, dans cette base, seront celles de $\mathscr{P}$, avec en plus $\mathscr{R}_0$ commutatif et

$$[a_i, q_j] = \varepsilon_{ijk}\, q_k,\ [a_i, q'_j] = \varepsilon_{ijk}\, q'_k,\ [b_i, q_j] = \varepsilon_{ijk}\, q'_k \text{ et } [b_i, q'_j] = -\varepsilon_{ijk}\, q_k\,.$$

$\mathfrak{L}$ est une sous-algèbre de Levi de $\mathscr{R}$, et toute autre est de la forme

$$(I + ad(p_0 + q_0))\,\mathfrak{L},\ \text{où}\ p_0 \in \mathscr{P}_0,\ \text{et}\ q_0 \in \mathscr{Q}_0 = (q_k\,;\, q'_k)$$

est combinaison des q_k et q'_k (à coefficients réels). Comme l'intersection de cette dernière algèbre avec $\mathscr{P} = \mathfrak{L}.\mathscr{P}_0$ est indépendante de p_0, on pourra faire $p_0 = 0$, pour ce qui est de notre problème : nous cherchons une sous-algèbre $\mathfrak{L}'$ de $\mathscr{R}$ isomorphe à $\mathfrak{L}$ avec $\mathscr{P} \cap \mathfrak{L}'$ minimum. Prenons alors

$$q_0 = -\sum_{k=1}^{3} (\alpha_k\, q_k + \alpha'_k\, q'_k)\,.$$

$\mathfrak{L}' = (I + adq_0)\,\mathfrak{L}$ aura alors pour base $(a'_k,\ b'_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ avec

$$a'_i = a_i + \alpha_j\, q_k - \alpha_k\, q_j + \alpha'_j\, q'_k - \alpha'_k\, q'_j$$

$$\text{et}\ b'_i = b_i - \alpha'_j\, q_k + \alpha'_k\, q_j + \alpha_j\, q'_k - \alpha_k\, q'_j$$

(ici, i, j, k sont pris cycliques).
Montrons qu'en général $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}' = (\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1))$. L'élément

$$\sum_{k=1}^{3} (\lambda_k\, a_k + \mu_k\, b_k) \in \mathfrak{L}$$

appartient aussi à $\mathfrak{L}'$ si et seulement si les 6 équations linéaires homogènes suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \alpha_j\, \lambda_k - \alpha_k\, \lambda_j - \alpha'_j\, \mu_k + \alpha'_k\, \mu_j = 0 \\ \alpha'_j\, \lambda_k - \alpha'_k\, \lambda_j + \alpha_j\, \mu_k - \alpha_k\, \mu_j = 0 \end{cases}$$

(i, j, k cycliques ; on annule les coefficients de q_i et q'_i, respectivement).

Il est clair que $\lambda_k = \alpha_k$ et $\mu_k = \alpha'_k$ et plus généralement que

$$\lambda_k = \beta\alpha_k + \beta'\alpha'_k,\ \mu_k = \beta\alpha'_k - \beta'\alpha_k\,,$$

est solution du système. [On peut d'ailleurs retrouver ceci plus abstraitement : $l \in \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'$ si et seulement si $[q_0, l] = 0$; si $q_0 \neq 0$, $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}'$ est une sous-algèbre (commutative) de dimension 2, engendrée par $l(q_0) = a(q_0) + Ja(q_0)$ (l'élément de $\mathfrak{L} = (a_k\ ;\ b_k)$ associé de façon évidente à $q_0 \in \mathscr{Q}_0 = (q_k\ ;\ q'_k)$) et $l(q_0)^{\perp} = a'(q_0) - Ja(q_0)$ (on utilise ici la décomposition de Cartan $\mathfrak{L} = (a_k) + J(a_k)$, avec $J(a_k) = (b_k)$ — où (a_k) dénote la sous-algèbre engendrée par les a_k)].

On voit que si (λ_k, μ_k) est solution, $(\mu_k, -\lambda_k)$ est aussi solution, et comme

$$\left[\sum_{1}^{3} (\lambda_k\, a_k + \mu_k\, b_k), \sum_{1}^{3} (\mu_k\, a_k - \lambda_k\, b_k)\right] = 0\,,$$

l'intersection contient avec tout élément son « orthogonal », donc est une sous-algèbre commutative maximale, ou est tout £. Dans le cas général ($q_0 \neq 0$), on aura $\mathscr{R} = \mathscr{P} + £' + (u(1) \oplus u(1))$, où $\mathscr{P} = £.\mathscr{P}_0$; par conséquent, $\mathscr{R} = U(\mathscr{P}, £, u(1) \oplus u(1))$ avec intersection de dimension 2, les injections de $\mathscr{P}$ et £ dans $\mathscr{R}$ étant $\mathscr{P} \to \mathscr{P}$ et $£ \to £'$ (on a noté par la même lettre £ l'algèbre abstraite du groupe de Lorentz et la sous-algèbre de Levi de $\mathscr{R}$ avec laquelle on a construit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{R}$: il est clair que si l'on parle de $U(\mathscr{P}, £, u(1) \oplus u(1))$, c'est de la première qu'il s'agit, alors que si l'on parle de $£.\mathscr{R}_0 = \mathscr{R}$, c'est de la seconde). Remarquons qu'ici $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ commute avec £, mais aussi avec tout $\mathscr{R}_0$ car ce dernier est commutatif : on a donc une unification non triviale, mais pas de correction à $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ pour en faire un invariant ; cela tient à ce que la représentation de la sous-algèbre de Levi de $\mathscr{R}$ qui définit le produit semi-direct contient D_N en facteur direct. Si l'on avait pris une algèbre contenant £ (et pas en facteur direct) au lieu de £, on aurait pu éviter ceci, comme on le verra plus loin. Cette remarque va dans le même sens que celle que l'on avait faite au chapitre I, 8°), dans un tout autre contexte.

Nous allons maintenant voir, dans un cas particulier caractéristique (et intéressant par lui-même), toute la différence qu'il y a entre les algèbres compactes et les algèbres non compactes (essentiellement celles contenant £), à ce point de vue.

5. PROPOSITION. *Toute algèbre unifiante* $U(\mathscr{P}, su(3))$ *est isomorphe à* $\mathscr{P} \oplus su(3)$, *et toute algèbre unifiante* $U(\mathscr{P}, su(3), u(1))$ *est isomorphe à* $\mathscr{P} \oplus su(3) \oplus u(1)$ (*intersection* $\{0\}$) *ou à* $\mathscr{P} \oplus su(3)$ (*intersection de dimension* 1, *entre* u(1) *et* $\mathscr{P}$, *ou entre* u(1) *et* su(3)), *ou encore à* $su(3) \oplus$ Dér $(\mathscr{P})$.

Cherchons en effet s'il existe une solution $\mathscr{R}$ autre que les solutions triviales ci-dessus. On cherche donc $\mathscr{R}$ telle qu'il existe des morphismes injectifs φ et ψ, $0 \to \mathscr{P} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{R}$ et $0 \to su(3) \xrightarrow{\psi} \mathscr{R}$ (et éventuellement $0 \to u(1) \xrightarrow{\psi'} \mathscr{R}$) tels que $\mathscr{R} = \varphi(\mathscr{P}) + \psi(su(3))$ (+ éventuellement $\psi'(u(1))$). Notons $\mathscr{B}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathscr{R}$: $\mathscr{R} = \mathscr{B}.\mathscr{R}_0$ et $\mathscr{B}$ doit contenir une sous-algèbre isomorphe à £ et une autre isomorphe à su(3) ; de plus, $\dim \mathscr{B} \leqslant \dim \mathscr{R} \leqslant 18$ ou 19 (suivant que l'on ajoute ou non le u(1)), et, si $\dim \mathscr{B} > \dim £ + \dim su(3) = 14$, on devra avoir aussi $\mathscr{B} \supset \approx \mathscr{P}$ ($\mathscr{B}$ contient une sous-algèbre isomorphe à $\mathscr{P}$) : en effet, $\forall p_0 \in \mathscr{P}_0$, on sait que $\{p_0 + [£, p_0]\} = \mathscr{P}_0$, donc toute sous-algèbre contenant $\varphi(£)$ et $\varphi(p_0)$, pour un certain p_0, contient déjà $\varphi(\mathscr{P})$ (dans le cas où l'on rajoute un u(1), on aura $\mathscr{B} \supset \approx \mathscr{P}$ si $\dim \mathscr{B} > 15$). On ne peut pas avoir $\mathscr{B}$ de types $\mathfrak{a}_2$ ou $\mathfrak{g}_2$, aucune de leurs formes réelles ne contenant £. Les algèbres de type $\mathfrak{b}_2$ ne contiennent pas su(3) (de type $\mathfrak{a}_2$). $\mathscr{B}$ ne peut pas non plus être sl(3, **C**), cette dernière étant d'ordre 16, et ne contenant pas $\mathscr{P}$. La seule forme réelle de $\mathfrak{a}_3$ contenant su(3) et £ est su(3, 1), mais cette dernière ne contient pas $\mathscr{P}$, et n'a pas de représentation réelle en dimension 4, donc ne peut permettre d'obtenir $\mathscr{P}$ par produit semi-direct de $\mathscr{B}$ avec un idéal

commutatif de dimension (au plus) 4. Donc $\mathscr{B}$ ne peut pas être une algèbre simple. De même, si $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \oplus \cdots \oplus \mathscr{B}_k$, où $\mathscr{B}_j$ est simple, un même $\mathscr{B}_j$ ne peut pas contenir à la fois $\approx \mathfrak{L}$ et $\approx \mathfrak{su}(3)$ (où « contenir $\approx \mathfrak{L}$ » signifie contenir une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{L}$) ; donc $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{su}(3)$ est une sous-algèbre semi-simple de $\mathscr{R}$, de dimension 14 (d'où la trivialité de $U(\mathscr{P}, \mathfrak{su}(3))$ en vertu du lemme montré au 1°) ; c'est alors une sous-algèbre de Levi, puisqu'il n'existe pas d'autre algèbre semi-simple la contenant, de dimension $\leqslant 19$ (et contenant $\mathscr{P}$ si la dimension est $\geqslant 16$). Mais (on le voit très bien sur la table de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$), $D_N(\mathfrak{L})$ est maximale dans $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$: il en résulte que l'homomorphisme $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{su}(3) \to \text{Dér}\,(\mathscr{R}_0)$, avec $\mathscr{R}_0$ commutatif de dimension 4 ou 5, et qui doit redonner $\mathscr{P}$ avec $\mathfrak{L}$ et $\mathscr{P}_0$, est nul sur $\mathfrak{su}(3)$ (qui n'a d'ailleurs pas de représentation réelle en dimension 4 ou 5) : d'où $\mathscr{R} \approx \mathscr{P} \oplus \mathfrak{su}(3)$, et $\oplus\, \mathfrak{u}(1)$ le cas échéant, si $\mathscr{R}_0$ est commutatif. Si $\mathscr{R}_0$ est résoluble, on a (comme on le verra au 8°) encore la possibilité $\text{Dér}\,(\mathscr{P}) \oplus \mathfrak{su}(3)$. On aurait de même

$$U(\mathscr{P}, \mathfrak{su}(3), \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)) = \mathfrak{su}(3) \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)) .$$

On voit ainsi une différence essentielle entre $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{su}(3)$, par exemple.

Remarque. Nous pouvons voir immédiatement que, dans certains cas, l'existence d'une $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ avec $\mathfrak{X}$ semi-simple, entraîne l'existence dans $\mathfrak{X}$ d'une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{L}$.

Soit en effet $\mathscr{R} = U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) = \varphi(\mathscr{P}) + \psi(\mathfrak{X})$. Notons $\mathscr{B}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathscr{R}$ contenant $\psi(\mathfrak{X})$, $\mathscr{B}'$ une sous-algèbre de Levi contenant $\varphi(\mathfrak{L})$. Pour tout choix de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, on a $\varphi(\mathfrak{L}) \cap \psi(\mathfrak{X}) = \Pi \subset \mathscr{B} \cap \mathscr{B}'$; si Π est semi-simple, il existe un automorphisme spécial τ de $\mathscr{R}$ transformant $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$ (donc $\varphi(\mathfrak{L})$ en une algèbre isomorphe, contenue dans $\mathscr{B}$) laissant invariants les éléments de Π (cf. ([13]), III, p. 141). Supposons alors que l'intersection Π soit semi-simple $\neq \{ 0 \}$, donc de dimension 3 pour ce qui nous intéresse, car sinon $\mathfrak{X} \supset \approx \mathfrak{L}$ évidemment, et que l'on ait pu choisir $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$, et par conséquent τ, de telle sorte que $\tau\varphi(\mathfrak{L}) \cap \psi(\mathfrak{X}) \supset \Pi$ strictement (il est évident que $\tau\varphi(\mathfrak{L}) \cap \psi(\mathfrak{X}) \supseteq \Pi$, car $\tau\Pi = \Pi$), c'est-à-dire qu'en « faisant tourner » $\varphi(\mathfrak{L})$ par un automorphisme spécial pour amener $\mathscr{B}$ en $\mathscr{B}'$, l'intersection grandisse. La structure de $\mathfrak{L}$ montre alors que nécessairement $\tau\varphi(\mathfrak{L}) \subset \psi(\mathfrak{X})$, soit $\mathfrak{X} \supset \approx \mathfrak{L}$.

6. Nous allons voir que ceci est un phénomène très général (dans le cas d'unifications non triviales). Auparavant, rappelons le théorème suivant (cf ([19])) :

THÉORÈME. *Soit* $\mathfrak{g}_0$ *une algèbre de Lie* semi-simple *sur* **R**. *Il existe une décomposition de* $\mathfrak{g}_0$ (décomposition d'Iwasawa) $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{n}_0$ (*somme directe d'espaces vectoriels*) *telle que* $\mathfrak{k}_0$ *soit une sous-algèbre compacte maximale,* $\mathfrak{a}_0$ *un sous-espace abélien maximal* (*à éléments semi-simples ; cf.* ([12]) *e.g. pour ce terme*) *de l'espace* $\mathfrak{p}_0$ *correspondant à la décomposition de*

Cartan $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{n}_0$ *une sous-algèbre nilpotente,* $(\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{n}_0)$ *étant une sous-algèbre résoluble. De plus, il existe une base de l'algèbre complexe* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{0(\mathbf{C})}$ *telle que les matrices de* $ad(\mathfrak{k}_0 + i\mathfrak{p}_0)$ *soient antihermitiennes, celles de* $ad\mathfrak{n}_0$ *triangulaires (toutes inférieures, par exemple, avec 0 dans la diagonale) et celles de* $ad\mathfrak{a}_0$ *diagonales, à diagonale réelle. Si G est un groupe de Lie connexe d'algèbre de Lie* $\mathfrak{g}_0$, *et K, A, N sont les sous-groupes de G d'algèbres* $\mathfrak{k}_0$, $\mathfrak{a}_0$, $\mathfrak{n}_0$ *respectivement, on aura aussi* $G = KAN$ *(et A et N seront simplement connexes).*

Nous aurons également besoin du théorème suivant, dû à Malcev ([21]) :

THÉORÈME. *La dimension maximale des sous-algèbres commutatives (à éléments nilpotents) d'une algèbre de Lie* complexe *simple est* $\left[\frac{(n+1)^2}{4}\right]$ *pour* $\mathfrak{a}_n$, $\frac{1}{2}n(n-1)+1$ *pour* $\mathfrak{b}_n$ $(n \geqslant 4)$ $\frac{1}{2}n(n+1)$ *pour* $\mathfrak{c}_n$, $\frac{1}{2}n(n-1)$ *pour* $\mathfrak{d}_n$ $(n \geqslant 4)$, et 3, 5, 9, 16, 27, 36 *pour (respectivement)* $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$ *et* $\mathfrak{e}_8$. *De plus, pour* $\mathfrak{a}_n$ $(n \geqslant 3)$, $\mathfrak{b}_n$ $(n \geqslant 5)$, $\mathfrak{c}_n$, $\mathfrak{d}_n$ $(n \geqslant 5)$, $\mathfrak{b}_3$, $\mathfrak{f}_4$, $\mathfrak{e}_6$, $\mathfrak{e}_7$, $\mathfrak{e}_8$, *elles sont toutes conjuguées par des automorphismes, alors que pour* $\mathfrak{b}_4$ *et* $\mathfrak{d}_4$ *il y a deux classes, et trois classes pour* $\mathfrak{g}_2$.

Notons alors $\mathfrak{s}$ une algèbre simple complexe, $\mathfrak{s}_0$ une forme réelle, $\mathfrak{s}|_{\mathbf{R}} = \mathfrak{s}_0 \otimes \mathbf{C}$ la « restriction réelle » de $\mathfrak{s}$, et $\mathfrak{u}$ une forme réelle compacte de $\mathfrak{s}$ telle que, $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{k}_0 + \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{n}_0$ étant une décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{s}_0$, on ait $\mathfrak{k}_0 \subset \mathfrak{u}$. On sait que l'on a alors une décomposition de Cartan de $\mathfrak{s}|_{\mathbf{R}}$ en $\mathfrak{u} + J\mathfrak{u}$ (J : structure complexe), et une décomposition d'Iwasawa $\mathfrak{s}|_{\mathbf{R}} = \mathfrak{u} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$, où $\mathfrak{a} \subset J\mathfrak{u}(\mathfrak{a}_{(\mathbf{C})})$ étant une sous-algèbre de Cartan de $\mathfrak{s}$), et $\mathfrak{n}$ est nilpotente ; de plus, $\mathfrak{a}_0 \subset \mathfrak{a}$ (l'égalité n'étant obtenue que pour la forme normale) et $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}$. $\mathfrak{n}$ contient une sous-algèbre commutative à éléments nilpotents de dimension le double de celle de $\mathfrak{s}$, alors que la sous-algèbre commutative à éléments nilpotents de $\mathfrak{n}_0$ est de dimension au plus égale à celle de l'algèbre correspondante de $\mathfrak{s}$ (puisque tous les éléments d'une sous-algèbre compacte de $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, pour tout n, sont semi-simples) — elle lui sera égale, entre autres, pour la forme normale ; grossièrement, on peut dire que « plus une algèbre de Lie réelle est compacte (c'est-à-dire plus l'importance relative de la sous-algèbre compacte maximale est grande) plus la dimension d'une sous-algèbre commutative à éléments nilpotents de dimension maximale est petite ». Ceci n'est pas toujours apparent sur les algèbres de petite dimension. Par exemple (et cette remarque nous servira plus tard) prenons le cas des algèbres $\mathfrak{so}(p, 1)$; on peut les considérer comme réalisées par des matrices réelles d'ordre $p+1$, de la forme $\begin{pmatrix} A & X \\ \tilde{X} & 0 \end{pmatrix}$ où A est une matrice antisymétrique d'ordre p, et X un vecteur colonne (à p lignes) ; celles où $X = 0$ donnent une sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{so}(p)$, et les matrices

$$b_k = E_{k(p+1)} + E_{(p+1)k} \qquad (k = 1, ..., p)$$

(les E_{ij} sont la base canonique des algèbres $\mathfrak{gl}$) forment une base du sous-espace supplémentaire de $\mathfrak{so}(p)$ ainsi réalisé, dans une décomposition de Cartan de $\mathfrak{so}(p, 1)$; les éléments $a_k = E_{k1} - E_{1k}$ $(k = 2, ..., p)$ appartiennent au $\mathfrak{so}(p)$ ainsi réalisé, et l'algèbre engendrée par les éléments $(a_k + b_k)$ (lesquels sont nilpotents, d'ordre 3 dans la réalisation $(p + 1)$ dimensionnelle choisie) est une sous-algèbre commutative de $\mathfrak{so}(p, 1)$, de dimension $p - 1$. Dans le cas de $\mathfrak{so}(5, 1)$, on trouve $4 = \left[\frac{16}{4}\right]$, donc la dimension maximale est ici atteinte (de même que dans $\mathfrak{so}(4, 2)$ ou $\mathfrak{so}(3, 3) \approx \mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$) ; de même pour $\mathfrak{so}(6, 1)$ (de type $\mathfrak{b}_3$), $\mathfrak{so}(7, 1)$ (de type $\mathfrak{d}_4$), et $\mathfrak{so}(8, 1)$ (de type $\mathfrak{b}_4$) ; mais pour $\mathfrak{so}(9, 1)$, la dimension est 8, alors qu'elle est de 10 pour le type $\mathfrak{d}_5$ (il n'y a pas dans $\mathfrak{so}(p, 1)$ de sous-algèbre commutative de dimension supérieure à $p - 1$, eu égard à la décomposition d'Iwasawa de cette algèbre).

7. LEMME. *$U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1))$ est soit (unification banale) $\mathscr{P}$, soit (triviale) $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{u}(1)$, soit* Dér $(\mathscr{P}) \approx \mathfrak{u}(1).\mathscr{P}$.

En effet, £ est une sous-algèbre de Levi d'une telle unification ; donc celle-ci est $£.\mathscr{R}_0$, avec $\mathscr{R}_0$ résoluble de dimension 5 si l'on n'est pas dans le cas banal. Mais £ n'a pas de représentation réelle en dimension 5 du type $\begin{pmatrix} D_N & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$, ce qui est nécessaire pour retrouver $\mathscr{P}$, sauf la représentation évidente $D_N \oplus O$ (O étant la représentation triviale) ; donc, sauf le cas banal, on aura $U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1)) \approx (£ \oplus \mathfrak{u}(1)).\mathscr{P}_0$; mais D_N est irréductible, donc les seules matrices commutant avec $D_N(£)$ sont multiples de l'identité (lemme de Schur), et par conséquent à un générateur de u(1) correspondra, dans l'homomorphisme qui définit le produit semi-direct, soit l'identité, auquel cas on obtient Dér $(\mathscr{P})$, soit 0, auquel cas on a le produit direct $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{u}(1)$.

LEMME. *Toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{so}(3))$ est soit triviale $(\mathscr{P} \oplus \mathfrak{so}(3))$, soit banale $(\mathscr{P})$. Toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{so}(3), \mathfrak{u}(1))$ est soit triviale ou banale $(\mathscr{P}, \mathscr{P} \oplus \mathfrak{u}(1)$, ou encore $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{so}(3))$, soit $\mathfrak{so}(3) \oplus$ Dér $(\mathscr{P})$, soit produit semi-direct $£.\mathscr{R}_0$ avec $\mathscr{R}_0$ commutatif de dimension 8, défini par une représentation $D_N \oplus D_4$ de £, où D_4 est une représentation de £ en dimension 4, non équivalente à D_N, et non réductible par des transformations réelles (on l'obtient par exemple en cherchant des sous-algèbres de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$ isomorphes à £ — cf. appendice —). Mêmes résultats pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$.*

En effet, l'unification $\mathfrak{U}$ ne peut pas être simple, puisqu'elle doit contenir $\mathscr{P}$ et être de dimension $\leqslant 13$ (ou 14 si on ajoute un u(1)). Or, s'il est vrai que $\mathfrak{so}(4, 1) = U(£, \mathfrak{so}(3), \mathfrak{u}(1))$, on ne peut pas former un produit semi-direct avec $\mathscr{P}_0$ pour avoir $\mathscr{P}$, car cette algèbre n'a pas de représentation réelle (différente de 0) en dimension 4 (elle en a une, complexe, comme

$\mathfrak{sp}(1, 1)$). $\mathfrak{so}(3, 2).\mathscr{P}_0$ ne contient pas non plus $\mathscr{P}$ (la représentation de dimension 4 de $\mathfrak{so}(3, 2)$ donne D_4 sur £). L'algèbre de Levi $\mathscr{R}$ de $\mathfrak{U}$ est donc soit $\mathfrak{X} \oplus$ £, soit £ ($\mathfrak{X}$ est de type $\mathfrak{a}_1$). Si c'est $\mathfrak{X} \oplus$ £, d'après le lemme vu au 1°) de cette partie, $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) \approx \mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$. Pour ce qui est de $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$, il sera (£ $\oplus \mathfrak{X}$). $\mathscr{R}_0$, avec $\mathscr{R}_0$ résoluble de dimension 4 ou 5, et contenant $\mathscr{P}_0$ (commutatif de dimension 4) ; l'homomorphisme de définition de ce produit semi-direct, qui doit donner la représentation D_N sur £, devra être nul sur $\mathfrak{X}$; donc $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{X} \oplus (£.\mathscr{R}_0)$, soit $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{X} \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1))$, d'où le résultat voulu d'après le lemme précédent.

Si c'est £, on aura $\mathfrak{U} = £.\mathscr{R}_0$, avec $\mathscr{R}_0$ résoluble de dimension $\leqslant 8$; de plus, dans un tel $\mathfrak{U}$, on devra pouvoir « déplacer » une sous-algèbre $\mathfrak{X}$ (de type $\mathfrak{a}_1$) de £ (au moyen d'un automorphisme spécial) de façon à la rendre disjointe de $\mathfrak{X}$. Si $\mathscr{R}_0$ n'est pas commutatif de dimension 8, la représentation de £ dans $\mathscr{R}_0$ devra être $D_N \oplus O$ (O de dimension $\leqslant 4$), ce qui ne donne pas le résultat cherché. Avec $D_N \oplus D_N$, on voit aisément qu'on ne peut pas déplacer $\mathfrak{X}$ de façon convenable (on le reverra plus loin, comme cas particulier de ce que l'on fait avec £). Il ne reste que ce que nous avons noté $D_N \oplus D_4$, et dans ce cas (en prenant une base $p_1, \ldots, p_4$, et $q_1, \ldots, q_4$ de $\mathscr{R}_0$) on voit (on le montrera explicitement plus loin, quand on traitera £) que $(I + 2\,ad(\alpha q_4 + \beta q_3 + \gamma q_2 + \delta q_1))\,\mathfrak{X}$ donne (pour $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ convenables, ce qui est le cas général) le $\psi(\mathfrak{X})$ cherché de l'unification (par exemple, on pourra prendre pour base de $\psi(\mathfrak{X})$, si $\mathfrak{X} = \mathfrak{so}(3)$, $a'_k = a_k + \alpha q_k$; $k = 1, 2, 3$, où (a_k) est une base du $\mathfrak{X}$ de £ ; le $\mathfrak{u}(1)$ ajouté est alors engendré par q_4 (par exemple)). On a évidemment le même résultat pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$.

8. Proposition. *Soit $\mathfrak{X}$ une algèbre de Lie (réelle) compacte simple, distincte de $\mathfrak{so}(3)$ (que l'on vient de traiter). Toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ est triviale : $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$. De plus, toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$ est triviale ($\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$ ou $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}\ \mathfrak{u}(1)$), ou « pseudo-triviale » : $\mathfrak{X} \oplus$ Dér ($\mathscr{P}$).*

Notons en effet $\mathfrak{U}$ l'unification, et $\mathscr{R}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{U}$, contenant l'image $\psi(\mathfrak{X})$ de $\mathfrak{X}$ dans $\mathfrak{U}$. Comme $\mathscr{R}$ doit aussi contenir une sous-algèbre isomorphe à £, $\mathscr{R} \supset \psi(\mathfrak{X})$ strictement. Deux cas sont alors possibles : ou $\mathscr{R}$ est simple et contient $\psi(\mathfrak{X})$ (simple), ou $\mathscr{R}$ est semi-simple (non simple) donc nécessairement $\mathscr{R} \approx \mathfrak{X} \oplus$ £. Si on cherche alors $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$, et si $\mathscr{R} \approx \mathfrak{X} \oplus$ £, d'après le lemme vu au 1°) de cette partie, $\mathfrak{U} \approx \mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$; si on cherche $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$, on aura $\mathfrak{U} \approx$ (£ $\oplus \mathfrak{X}$). $\mathscr{R}_0$, où $\mathscr{R}_0$ est une algèbre résoluble de dimension 4 et 5 contenant $\mathscr{P}_0$ (commutatif, de dimension 4) ; l'homomorphisme de définition de ce produit semi-direct devra se décomposer sur £ en $D_N \oplus O$ (avec O de dimension 0 ou 1, représentation triviale), pour que $\mathfrak{U} \supset \mathscr{P}$; vu la maximalité de D_N(£) dans $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$, cet homomorphisme (£ $\oplus \mathfrak{X}$) $\to$ Dér ($\mathscr{R}_0$) devra être nul sur $\mathfrak{X}$, d'où $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{X} \oplus (£.\mathscr{R}_0)$, soit $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{X} \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1))$, unification triviale ou « pseudo triviale ».

Supposons alors $\mathscr{R}$ simple. Il résulte de l'étude de Dynkin ([14]) que les sous-algèbres semi-simples maximales de plus grande dimension sont :

pour $\mathfrak{a}_n$, l'algèbre $\mathfrak{a}_{n-1}$, et $\dim \mathfrak{a}_n - \dim \mathfrak{a}_{n-1} = 2n - 1$ $(n \geqslant 2,\ n \neq 3)$;
pour $\mathfrak{b}_n$, c'est $\mathfrak{d}_n$, et $\dim \mathfrak{b}_n - \dim \mathfrak{d}_n = 2n$ $(n \geqslant 2)$;
pour $\mathfrak{c}_n$, c'est $\mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_1$, et $\dim \mathfrak{c}_n - \dim \mathfrak{c}_{n-1} = 4n + 3$,
$\dim \mathfrak{c}_n - \dim (\mathfrak{c}_{n-1} \oplus \mathfrak{a}_1) = 4n$ $(n \geqslant 3)$;
pour $\mathfrak{d}_n$, c'est $\mathfrak{b}_{n-1}$, et $\dim \mathfrak{d}_n - \dim \mathfrak{b}_{n-1} = 2n - 1$ $(n \geqslant 3)$;
pour $\mathfrak{g}_2$, c'est $\mathfrak{a}_2$, et $\dim \mathfrak{g}_2 - \dim \mathfrak{a}_2 = 6$;
pour $\mathfrak{f}_4$, c'est $\mathfrak{b}_4$, et $\dim \mathfrak{f}_4 - \dim \mathfrak{b}_4 = 16$;
pour $\mathfrak{e}_6$, c'est $\mathfrak{d}_5$, et $\dim \mathfrak{e}_6 - \dim \mathfrak{d}_5 = 33$ (on a aussi $\mathfrak{d}_5 \oplus \mathfrak{a}_\circ$, où $\mathfrak{a}_\circ = \mathfrak{u}(1)$) ;
pour $\mathfrak{e}_7$, c'est $\mathfrak{e}_6$, et $\dim \mathfrak{e}_7 - \dim \mathfrak{e}_6 = 55$ (on a aussi $\mathfrak{e}_6 \oplus \mathfrak{a}_\circ$) ;
pour $\mathfrak{e}_8$, c'est $\mathfrak{e}_7 \oplus \mathfrak{a}_1$, ou $\mathfrak{d}_8$, et la différence des dimensions est 122.

Or $\dim \mathfrak{U} \leqslant \dim \mathfrak{X} + 10$ (+ 1 si on rajoute un u(1)), et $\dim \mathscr{R} \leqslant \dim \mathfrak{U}$. Mais $2n + 1 > 10$ pour $n \geqslant 5$, et > 11 pour $n \geqslant 6$; $2n > 10$ ou 11 pour $n \geqslant 6$; $4n > 10$ ou 11 pour $n \geqslant 3$; $2n - 1 > 10$ pour $n \geqslant 6$ et > 11 pour $n \geqslant 7$. En outre la forme réelle non compacte de $\mathfrak{g}_2$ que, suivant Freudenthal ([17]), nous noterons $\mathfrak{g}_{2,2}$, ne contient pas £ (ni $\mathscr{P}$, *a fortiori*), donc ne peut être sous-algèbre de Levi d'une unification ; de plus, hormis $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{b}_3$, aucune algèbre exceptionnelle n'est sous-algèbre d'une algèbre simple de dimension égale à la sienne, plus un nombre au plus égal à 10 (ou 11).

Donc toute sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{U}$ ne peut être qu'isomorphe à £ $\oplus$ $\mathfrak{X}$, sauf peut être si $\mathfrak{X}$ est des types (simples, compacts) : $\mathfrak{g}_2$, $\mathfrak{su}(n)$ pour $n = 2, 3, 4$ (et 5 si on rajoute un u(1)), et $\mathfrak{so}(n)$ pour $n = 5, 6, 7, 8, 9, 10$ (et 11 si on rajoute un u(1)).

Comme il n'existe aucune forme réelle de $\mathfrak{b}_3$ contenant à la fois £ et $\mathfrak{g}_2$ (compact), l'hypothèse $\mathfrak{X} = \mathfrak{g}_2$ tombe. Le cas de $\mathfrak{su}(2) \approx \mathfrak{so}(3)$ a été traité antérieurement ; le cas de $\mathfrak{su}(3)$ aussi, et on a obtenu, dans ce cas, le résultat annoncé ici.

Pour $\mathfrak{X} = \mathfrak{su}(4) \approx \mathfrak{so}(6)$, $\mathscr{R}$ simple ne peut être que $\mathfrak{so}(6, 1)$ ou $\mathfrak{su}(4, 1)$ (cf. ([19])) par exemple pour toutes ces notations). Or $\mathfrak{so}(6, 1)$ ne contient pas $\mathscr{P}$, la « partie non compacte » de $\mathscr{P}$ étant de dimension 7, et celle de $\mathfrak{so}(6, 1)$ de dimension 6 ; et on ne peut avoir $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{so}(6, 1)$. $\mathscr{R}_0$, avec $\mathscr{R}_0$ de dimension 4 (ou 5), car il n'existe pas de représentation réelle non triviale de $\mathfrak{so}(6, 1)$ de ces dimensions. Quant à $\mathfrak{su}(4, 1)$, qui, pour la même raison, doit être toute l'unification, elle ne peut être cette dernière, car alors l'intersection entre $\varphi(\mathscr{P})$ et $\psi(\mathfrak{X})$ serait de dimension 1 (ou 2 au plus, si on rajoute un u(1)), et elle doit être au moins de dimension 3 (la partie compacte de $\mathscr{P}$) — on peut d'ailleurs vérifier directement que $\mathfrak{su}(4, 1)$ ne convient pas, en détaillant sa structure.

Le cas de $\mathfrak{su}(5)$ (si on rajoute un u(1)) s'élimine de même.

Pour $\mathfrak{X} \approx \mathfrak{so}(5) \approx \mathfrak{sp}(2)$, comme $\mathfrak{so}(5, 1) \approx \mathfrak{su}^*(4) \not\approx \mathscr{P}$, ni n'a de représentation réelle en dimension 4 (ou 5), on a le même résultat — il

est évident que $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ ne peut être le $\mathscr{R}$ voulu (elle ne contient même pas $\approx \mathfrak{X}$).

Pour $\mathfrak{X} \approx \mathfrak{so}(7)$, il est clair que $\mathfrak{g}_2 \otimes \mathbf{C}$ ne convient pas. Or $\mathfrak{so}(7, 1)$ ne convient pas non plus, puisqu'elle ne contient pas $\mathscr{P}$. En effet, si on en prend une décomposition d'Iwasawa, on voit que l'algèbre nilpotente de cette décomposition est commutative, alors que $\mathscr{P}$ contient bien une sous-algèbre nilpotente de dimension 6 également (on fait une décomposition d'Iwasawa de £, et on peut « prolonger » ceci à $\mathscr{P}$) mais elle n'est pas commutative ; on peut d'ailleurs retrouver ceci avec une représentation propre (en dimension 8) de cette algèbre, comme de même (en dimension $p + 1$) des algèbres $\mathfrak{so}(p, 1)$: toutes ces algèbres contiennent « $\mathfrak{so}(4)$ inhomogène », mais pas « £ inhomogène » — pour contenir $\mathscr{P}$, on doit avoir au moins « virgule deux », comme $\mathfrak{so}(4, 2)$ par exemple —. D'où le résultat dans ce cas, les autres hypothèses tombant pour des raisons de dimension.

Pour $\mathfrak{X} = \mathfrak{so}(8)$, pour la même raison, la possibilité (*a priori* la seule) $\mathfrak{so}(8, 1)$, tombe (sous-algèbre nilpotente commutative de dimension 7) ; et d'ailleurs, l'intersection ne pourrait pas se faire sur la partie compacte de £, si on ne rajoute pas de $\mathfrak{u}(1)$ (elle est en effet de dimension 2).

Pour $\mathfrak{X} \approx \mathfrak{so}(9)$, où $\mathfrak{so}(10)$, ou $\mathfrak{so}(11)$, les (seules, *a priori*) possibilités $\mathfrak{so}(9, 1)$, $\mathfrak{so}(10, 1)$, et $\mathfrak{so}(11, 1)$ tombent, puisque dans aucun de ces cas l'intersection ne peut contenir la partie compacte de £ (que l'on ajoute ou non un $\mathfrak{u}(1)$) — et d'ailleurs, ces algèbres ne contiennent pas $\approx \mathscr{P}$. D'où $\mathscr{R} \approx £ \oplus \mathfrak{X}$ et la proposition.

9. Cas général. $\mathfrak{X}$ simple. Les cas $\mathfrak{X} \subseteq £$ ont déjà été traités. Supposons tout d'abord que $\mathfrak{X}$ n'ait pas de représentation réelle de dimension $\leqslant 10$. C'est le cas pour les types suivants : $\mathfrak{a}_n$ ($n \geqslant 10$ pour la forme normale, $n \geqslant 5$ pour les autres), $\mathfrak{a}_n \otimes \mathbf{C}$ et $\mathfrak{b}_n$ ($n \geqslant 5$), $\mathfrak{c}_n$ ($n \geqslant 6$ pour la forme normale, $n \geqslant 3$ pour les autres), $\mathfrak{d}_n$ ($n \geqslant 6$, et $\mathfrak{so}^*(10)$) ou encore $\mathfrak{d}_n \otimes \mathbf{C}$ ($n \geqslant 4$), $\mathfrak{b}_n \otimes \mathbf{C}$ et $\mathfrak{c}_n \otimes \mathbf{C}$ ($n \geqslant 3$), ou enfin toutes les algèbres exceptionnelles, hormis $\mathfrak{g}_2$. D'après le théorème de Levi-Malcev, $\mathfrak{U} = \mathscr{R} . \mathscr{R}_0$, avec $\mathscr{R} \supset \approx \mathfrak{X}$. Si $\mathscr{R}$ n'est pas simple, $\mathfrak{X}$ étant un des types ci-dessus, on aura nécessairement $\mathscr{R} \approx \mathfrak{X} \oplus £$; si $\mathscr{R}$ est simple, $\mathscr{R} \supset (\approx \mathfrak{X})$, donc n'aura *a fortiori* pas de représentation réelle de dimension au plus égale à 10.

Or $\dim \mathscr{R}_0 \leqslant 10$, donc $\mathfrak{U} \approx \mathscr{R} \oplus \mathscr{R}_0$ dans ce cas. Comme $\mathfrak{U}$ doit contenir une sous-algèbre isomorphe à $\mathscr{P}$ ($\mathfrak{U} \supset \approx \mathscr{P}$) et $\mathscr{R} \supset \approx £$, on a nécessairement $\mathscr{R} \supset \approx \mathscr{P}$. En effet, prenons pour $\mathscr{R}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{U}$ contenant $\psi(\mathfrak{X})$, l'unification s'écrivant $\mathfrak{U} = \varphi(\mathscr{P}) + \psi(\mathfrak{X})$ ($+ \psi'(\mathfrak{u}(1))$, éventuellement) ; on ne peut avoir $\varphi(£) \subset \mathscr{R}_0$ car $\mathscr{R}_0$ est résoluble, donc il existe $l_1 \in £$ tel que $\varphi(l_1) \in \mathscr{R}$, d'où $\varphi(£) \subset \mathscr{R}$; mais il n'existe pas de $p_0 \in \mathscr{P}_0$ tel que $\varphi(p_0) \in \mathscr{R}_0$, car sinon $\varphi([l, p_0]) = 0 \ \forall l \in £$; donc $\varphi(\mathscr{P}) \subset \mathscr{R}$. D'où $\mathscr{R}_0 \approx \{ 0 \}$ ou $\mathfrak{u}(1)$. Dans ce cas, les solutions ne peuvent donc qu'être $\mathfrak{X} \oplus \mathscr{P}$ (ou $\mathfrak{X} \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1))$), solution triviale (ou peut-être « pseudo-triviale »), ou $\mathfrak{U} = \mathscr{R}$ simple $\supset \approx \mathscr{P}$, ou encore (si on rajoute $\mathfrak{u}(1)$)

$\mathfrak{U} = \mathscr{R} \oplus \mathfrak{u}(1)$. Eu égard aux considérations de dimension, ceci ne se peut que si $\mathscr{R} \approx \mathfrak{X}$, sauf peut-être pour le cas $\mathfrak{X}$ de type $\mathfrak{b}_5$ et $U(\mathfrak{X}, \mathscr{P}, \mathfrak{u}(1))$, où un type $\mathfrak{d}_6$ pour $\mathfrak{U}$ n'est pas exclu par ces considérations, si $\mathfrak{X}$ n'est pas compacte.

Si l'on suppose maintenant $\mathfrak{X}$ *semi-simple*, aucun idéal simple de $\mathfrak{X}$ n'ayant de représentation de dimension $\leqslant 10$, on aura les mêmes résultats, bien évidemment. D'où :

PROPOSITION. *Si aucun idéal simple de* $\mathfrak{X}$ (*semi-simple*) *n'a de représentation réelle de dimension* $\leqslant 10$ [*resp.* 11], *ou bien* $\mathfrak{X} \not\supset \approx \mathscr{P}$, *auquel cas* $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) \approx \mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$ [resp. $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1)) \approx \mathfrak{X} \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1))$], *ou bien* $\mathfrak{X} \supset \approx \mathscr{P}$, *auquel cas on a en plus la solution banale* $\mathfrak{X}$ [resp. $\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{u}(1)$; *ou* $\mathfrak{X}$].

Restent donc en lice les algèbres simples suivantes (non compactes) :

$\mathfrak{su}(p, q)$ avec $2 \leqslant p + q \leqslant 5$, ou $\mathfrak{su}^*(4) = \mathfrak{so}(5, 1)$;
$\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ avec $2 \leqslant n \leqslant 10$; ou $\mathfrak{sl}(p, \mathbf{C})$ avec $2 \leqslant p \leqslant 5$;
$\mathfrak{so}(p, q)$ avec $3 \leqslant p + q \leqslant 10$ [ou 11 si on rajoute un $\mathfrak{u}(1)$],
dont $\mathfrak{so}(6, 2) = \mathfrak{so}^*(8)$; ou $\mathfrak{so}(p, \mathbf{C})$ avec $2 \leqslant p \leqslant 5$;
$\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ avec $3 \leqslant n \leqslant 5$ (car $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{R}) \leqslant \mathfrak{so}(3, 2)$) ; $\mathfrak{g}_{2,2}$.

(Le cas des algèbres simples compactes a déjà été étudié).

Parmi celles-ci, ne contiennent pas £ les algèbres non compactes suivantes : $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$, $\mathfrak{su}(2, 1)$, $\mathfrak{g}_{2,2}$; le cas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ a déjà été étudié.

LEMME. $U(\mathscr{P}, \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})) \approx \mathscr{P} \oplus \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$

et $U(\mathscr{P}, \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})\,\mathfrak{u}(1)) \approx U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1)) \oplus \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$.

En effet, posons $\mathfrak{U} = \mathscr{R}.\mathscr{R}_0$, $\mathscr{R}$ semi-simple. On a $\mathscr{R} \supset \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ et $\mathscr{R} \supset$ £ ; donc $\mathscr{R}$ ne peut pas être des types $\mathfrak{b}_2$, $\mathfrak{g}_2$ (quelle que soit la forme réelle). Or $\dim \mathscr{R} \leqslant 18$ (ou 19 si on rajoute $\mathfrak{u}(1)$) ; comme $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C}) \not\supset \approx \mathscr{P}$, elle ne peut pas être un $\mathscr{R}$. Reste le cas des formes réelles de $\mathfrak{a}_3$ — il est en effet bien évident que si $\mathscr{R}$ est semi-simple, non simple, $\mathscr{R} \approx$ £ $\oplus\ \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ et on a le résultat du lemme —. Si on fait $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ ($\mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$), cette forme devra contenir une sous-algèbre isomorphe à $\mathscr{P}$; mais $\mathfrak{su}(2, 2)$ ne contient pas $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ (cf. par exemple ([17])), et c'est la seule forme réelle contenant $\mathscr{P}$. Si on fait $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$, pour la même raison, on devra ici avoir $\mathfrak{U} = \mathscr{R}.\mathscr{R}_0$ avec $\mathscr{R}$ de type $\mathfrak{a}_3$ et $\mathscr{R}_0$ de dimension 4. Ceci impose $\mathscr{R} \approx \mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$. Mais φ(£) nous est imposé, dans $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$, car on veut qu'avec la représentation de dimension 4 de $\mathscr{R}$, qui définit le produit semi-direct, on ait $\mathscr{P}$ avec le φ(£) et $\mathscr{R}_0$, ce qui exige que la représentation coïncide sur £ avec D_N ; on doit ainsi avoir $\mathfrak{U} = \mathscr{R} + \mathscr{R}_0 = (\varphi(£) + \psi(\mathfrak{X}) + \psi'(\mathfrak{u}(1))) + \varphi(\mathscr{P}_0)$, l'intersection des termes figurant dans la parenthèse étant $\{ 0 \}$: or ceci est impossible, comme on le voit aisément sur la table de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$, qui ne peut pas être considérée comme $U(£, \mathfrak{sl}(3, \mathbf{R}), \mathfrak{u}(1))$ avec £ représenté dans $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$ par D_N(£) (cf. appendice). D'où le résultat.

LEMME. *On a* $\mathfrak{su}(2, 2) = U(\mathscr{P}, \mathfrak{su}(2, 1))$ *et* (*parallèlement*)

$$\mathfrak{so}(4, 3) = U(\mathscr{P}, \mathfrak{g}_{2,2}) .$$

Prenons en effet les générateurs de $\mathfrak{su}(2, 2) = \mathscr{S}$ comme $(a_k, a'_k, c_2$ $b_k, b'_k, c_1, c_3)$, comme on le décrit dans l'appendice. On peut représenter $\mathfrak{su}(2, 1)$ dans $\mathscr{S}$ par

$$(\tfrac{1}{2}(a_k + a'_k), \tfrac{1}{2}(a'_1 - a_1 + 2\,c_2)\,;$$

$$\tfrac{1}{2}(b'_1 + c_1), \tfrac{1}{2}(b'_2 + b_3), \tfrac{1}{2}(b_2 - b'_3), \tfrac{1}{2}(b_1 + c_3)) ,$$

et $\mathscr{P}$ par

$$(a_k\,;\, b_k, p_k = (a'_k + b'_k), (c_1 + c_2) = p_4)\,;$$

on peut d'ailleurs représenter $\mathscr{P}$ d'autres façons, qui reviennent à celle-ci. Avec $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{su}(2, 1)$ ainsi représentés dans $\mathscr{S}$, on vérifie que leur intersection est la seule (cf. ([12]), § 4, ex. 9) algèbre nilpotente de dimension 3 non commutative (isomorphe à celle des matrices triangulaires inférieures à diagonale nulle d'ordre 3), dont on peut prendre les générateurs comme étant :

$$\tfrac{1}{2}\,x_3 = (a'_1 + c_2) + (b'_1 + c_1) = p_1 + p_4\,;$$

$$(a_2 + a'_2) + (b'_2 + b_3) = p_2 + (a_2 + b_3) = x_1\,;$$

$$-\,(b_2 - b'_3) + (a_3 + a'_3) = p_3 + (a_3 - b_2) = x_2\,,$$

et on a les relations de commutation :

$$[x_1, x_2] = x_3, [x_2, x_3] = 0 = [x_1, x_3] .$$

En utilisant une réalisation quadridimensionnelle de $\mathscr{S}$ dans laquelle $\mathfrak{su}(2, 1)$ est réalisée en 3 dimensions seulement, on vérifie aisément que les seules combinaisons des générateurs de $\mathscr{S}$ pouvant appartenir à l'intersection sont celles (à coefficients réels) de x_1, x_2, x_3.

Comme $(\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{u}(1))$. $\mathscr{P}_0 \approx$ Dér $(\mathscr{P})$ est une sous-algèbre (non semi-simple) maximale de $\mathscr{S}$, et que $\mathfrak{su}(2, 1)$ en est une sous-algèbre simple maximale, l'unification ainsi décrite est (à un automorphisme près) la seule. D'ailleurs, si on a $\mathscr{S}$ pour unification, l'intersection devra être de dimension 3 ; or on connaît toutes les algèbres de dimension 3 (([12]), § 6, ex. 23). Les décompositions d'Iwasawa de $\mathscr{S}$, « de $\mathscr{P}$ » et de $\mathfrak{su}(2, 1)$ sont :

$\mathscr{S} = (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)) + [$(sous-espace abélien maximal à éléments semi-simples, de dimension 2) + (sous-algèbre nilpotente de dimension 6, contenant une partie commutative de dimension 4)].

$\mathfrak{su}(2, 1) = (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)) + [$(sous-espace abélien à éléments semi-simples, de dimension 1) + (sous-algèbre nilpotente de dimension 3, à partie commutative de dimension 2)].

$\mathscr{P} = \mathfrak{L} + \mathscr{P}_0 = (\mathfrak{su}(2)) + [(1$ élément semi-simple) $+ \{$ (sous-algèbre commutative de dimension 2) + (sous-algèbre commutative de dimension 4) $\}]$, la partie entre accolades formant une sous-algèbre nilpotente de dimension 6 (isomorphe à celle de $\mathscr{S}$).

Eu égard à la partie compacte, l'intersection devra être une sous-algèbre résoluble de dimension 3 (non commutative, à cause de $\mathfrak{su}(2, 1)$), puisque sinon l'intersection comprendrait au moins un générateur d'une sous-algèbre compacte maximale de $\mathscr{S}$ (1 pour $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, 3 pour $\mathfrak{su}(2)$).

De plus, dans $\mathscr{S}$, $\varphi(\mathscr{P})$ et $\psi(\mathfrak{su}(2, 1))$ (égales à leur algèbre dérivée) sont des sous-algèbres algébriques (cf. ([13]), II), donc leur intersection l'est aussi ; étant résoluble, elle s'écrira : (sous-algèbre commutative à éléments semi-simples) + (idéal des éléments nilpotents) (cf. ([13]), III). Si maintenant on avait une intersection résoluble non nilpotente, dont on a les relations de commutation par ([12]) (§ 6, ex. 23) — il y en a 2 types —, on voit que l'intersection comprendrait un générateur des « parties compactes » ; la seule intersection possible est donc l'algèbre nilpotente non commutative d'ordre 3, qui est celle de la décomposition d'Iwasawa de $\mathfrak{su}(2, 1)$.

Pour ce qui est de $\mathfrak{g}_{2,2}$ et de $\mathfrak{so}(4, 3)$, leurs décompositions d'Iwasawa s'écrivent :

$\mathfrak{g}_{2,2} = (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)) + [$(sous-algèbre abélienne à éléments semi-simples, de dimension 2) + (sous-algèbre nilpotente de dimension 6, de partie commutative de dimension 3)$] = \mathfrak{su}(2, 1) + \{$ sous-espace engendré par 2 générateurs de la « partie compacte », et 1 semi-simple et 3 nilpotents de la « partie non compacte ».

$\mathfrak{so}(4, 3) = (\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)) + [$(abélienne à éléments semi-simples de dimension 3) + (nilpotente de dimension 3, à partie commutative de dimension 5)$] = \mathscr{S} + \{$ même sous-espace que ci-dessus $\}$.

D'où $\mathfrak{so}(4, 3) = (\mathscr{P} + \mathfrak{su}(2, 1)$, avec intersection de dimension 3) $+ \{$ même sous-espace $\}$,

$= (\mathscr{P} + \mathfrak{g}_{2,2}$ avec intersection de dimension 3),

soit $\mathfrak{so}(4, 3) = U(\mathscr{P}, \mathfrak{g}_{2,2})$ avec intersection nilpotente de dimension 3.

10. Cas de $\mathfrak{X}$ semi-simple. Soit $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{X}_k$, où $\mathfrak{X}_j$ est simple et $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}_j)$ triviale pour $j = 1, \ldots, k$.

Posons $\mathfrak{U} = \mathscr{R}.\mathscr{R}_0$, où $\mathscr{R}$ est sous-algèbre de Levi. On aura alors $\mathscr{R} = \mathfrak{X}'_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{X}'_{k'}$, avec $\mathfrak{X}'_j$ simple ; deux cas sont possibles :

— ou $k' = k + 1$, $\mathfrak{X}'_{k+1} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{X}'_j = \mathfrak{X}_j$ $(j = 1, \ldots, k)$; dans ce cas, d'après le lemme montré au 1), $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) \approx \mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$.

— ou $k' = k$, $\mathfrak{X}'_j = \mathfrak{X}_j$ pour $j \neq j_0$ et par conséquent

$$\mathfrak{X}'_{j_0}.\mathscr{R}_0 = U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}_{j_0}), \text{ et } U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) = \Big(\bigoplus_{j \neq j_0} \mathfrak{X}_j\Big) \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}_{j_0})$$

d'après ce même lemme.

On ne peut pas avoir $k' < k$ car sinon (en ordonnant convenablement les $\mathfrak{X}_j$) on aura

$$\mathfrak{X}'_1 \supset (\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2 \text{ et } \mathfrak{L}) \text{ ou } \mathfrak{X}'_1 \supset (\mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2) \text{ et } \mathfrak{X}'_2 \supset (\mathfrak{X}_3 \text{ et } \mathfrak{L})$$

hypothèses exclues pour des raisons de dimensions, d'après la classification de Dynkin ([14]) des sous-algèbres semi-simples des algèbres simples.

Les résultats du cas « simple » s'étendent donc sans difficulté au cas « semi-simple ». Résumons-les en deux théorèmes :

THÉORÈME I. *Soit $\mathfrak{X}$ une algèbre de Lie semi-simple, sur $\mathscr{R}$.*

i) *Si $\mathfrak{X} \subset \mathfrak{L}$ strictement* ($\mathfrak{so}(3)$ *ou* $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$), *toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ est soit triviale ($\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$), soit banale ($\mathscr{P}$, cas inintéressant pour notre propos).*

ii) *Si $\mathfrak{X} = \mathfrak{su}(2, 1)$* [resp. $\mathfrak{X} = \mathfrak{g}_{2,2}$], *on peut avoir $\mathfrak{su}(2, 2) = U(\mathscr{P}, \mathfrak{su}(2, 1))$* [resp. $\mathfrak{so}(4, 3) = U(\mathscr{P}, \mathfrak{g}_{2,2})$] *avec intersection sur l'unique algèbre nilpotente non commutative d'ordre* 3.

iii) *Si aucun idéal simple de $\mathfrak{X}$ n'a de représentation réelle de dimension $\leqslant 10$, toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ est triviale ($\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$), ou banale ($\mathfrak{X}$, si $\mathfrak{X} \supset \mathscr{P}$).*

iv) *Si $\mathfrak{X}$ ne contient pas de sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{L}$, ni d'idéal simple envisagé aux* i) *et* ii) ($\mathfrak{so}(3)$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$; $\mathfrak{su}(2,1)$, $\mathfrak{g}_{2,2}$), *toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ est triviale ($\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$).*

COROLLAIRE. *Pour avoir $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) \neq \mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$ et de $\mathscr{P}$, il est nécessaire, si $\varphi(\mathscr{P}) \cap \psi(\mathfrak{X})$ est semi-simple (en particulier $\{0\}$) que $\mathfrak{X}$ contienne une sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{L}$, et en tout cas que $\mathfrak{X}$ soit non compacte.*

Si maintenant $\mathbf{X}$ est un groupe de Lie compact, d'algèbre de Lie (réductive) $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1 \oplus \mathfrak{X}_2$ ($\mathfrak{X}_1$ semi-simple maximale, $\mathfrak{X}_2$ abélienne), il est clair que $\mathfrak{L} \oplus \mathfrak{X}'_1$, où $\mathfrak{X}'_1$ ne diffère de $\mathfrak{X}_1$ que par un éventuel facteur direct $\mathfrak{so}(3)$ (qui serait mis en commun avec $\mathfrak{L}$), est une sous-algèbre de Levi de $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$; par conséquent, $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) \approx \mathfrak{X}'_1 \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}_2)$, et de plus il est immédiat que $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}_2) \approx \mathfrak{L}.U(\mathscr{P}_0, \mathfrak{X}'_2)$ où $\dim \mathfrak{X}_2 - \dim \mathfrak{X}'_2 \leqslant 2$ (et $\mathfrak{X}'_2 \subseteq \mathfrak{X}_2$). En outre, les seules unifications pouvant redonner $\mathbf{X}$ par passage aux groupes de Lie sont $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}'$, où $\mathfrak{X}'$ ne peut différer de $\mathfrak{X}$ que par un éventuel facteur direct $\mathfrak{so}(3)$ ou bien $\mathfrak{u}(1)$ (qui serait mis en commun avec $\mathscr{P}$), c'est-à-dire des unifications triviale ou banale et inintéressante (puisque contenant $\mathscr{P}$ en facteur direct). *Les groupes de Lie compacts sont ainsi tous éliminés par notre critère.*

THÉORÈME II. *Si $\mathfrak{X}$ est une algèbre de Lie semi-simple, sur $\mathbf{R}$, ne contenant pas de sous-algèbre isomorphe à $\mathfrak{L}$, ni d'idéal simple envisagé aux* i) *et* ii) *du théorème précédent, toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$ est isomorphe à $\mathfrak{X} \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{u}(1))$, soit ou $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$, ou $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X} \oplus \mathfrak{u}(1)$, ou $\mathfrak{X} \oplus$ Dér $(\mathscr{P})$. Dans le cas de $\mathfrak{so}(3)$ ou $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$, on a en plus les unifications banales ($\mathscr{P}$ et $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{u}(1)$) et des produits semi-directs $\mathscr{P}.\mathscr{R}_0 = \mathfrak{L}.(\mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{R}_0)$, $\mathscr{R}_0$ commutatif de dimension 4 — pour*

lesquels $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu$ *est encore un invariant* —. *Pour* $\mathfrak{su}(2, 1)$ *et* $\mathfrak{g}_{2,2}$, *même résultat qu'en* ii) (th. I), *avec éventuellement un facteur direct* $\mathfrak{u}(1)$ *en plus.*

11. Exemple. Construction d'une $U(\mathscr{P}, \mathfrak{L})$**.** Cherchons tout d'abord, *a priori*, quelle est « l'allure générale » d'une unification

$$U(\mathscr{P}, \mathfrak{L}') = \varphi(\mathscr{P}) + \psi(\mathfrak{L}') = \mathfrak{U}\ ,\ (\mathfrak{L}' \approx \mathfrak{L})\ ,$$

autre que les solutions triviale $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{L}'$ et banale $\mathscr{P}$.

Soit $\mathscr{R}$ une sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{U}$. On a $6 \leqslant \dim \mathscr{R} \leqslant \dim \mathfrak{U} \leqslant 16$; de plus, si $\dim \mathscr{R} > 12$, on devra avoir $\mathscr{R} \supset \approx \mathscr{P}$. La seule possibilité dans cette catégorie est $\mathfrak{su}(2, 2) = \mathscr{S}$, mais sa structure montre qu'elle ne répond pas au problème (on devrait avoir une intersection de dimension 1). Si $\mathscr{R} \neq \mathfrak{L}$, on ne peut avoir que $\mathscr{R}$ de type $\mathfrak{b}_2$, mais dans ce cas on ne peut avoir $\mathscr{P}$ qu'avec un idéal de dimension 5, soit 1 de plus qu'il n'est permis. Notons en passant que les *algèbres inhomogènes de* $\mathfrak{X} = \mathfrak{so}(3, 2)$ *ou* $\mathfrak{so}(4, 1)$ (avec un idéal commutatif de dimension 5) *sont des* $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$ avec intersection sur $\mathfrak{L}$.

Donc $\mathscr{R} = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{U} = \mathfrak{L}.\mathscr{R}_0$, et si on veut $\mathfrak{U} \neq \mathscr{P}$, on devra avoir

$$\mathscr{R}_0 = \mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{R}'_0\ ,$$

avec $\mathscr{R}'_0$ de dimension 4 ou 6 (pour avoir une représentation réelle de $\mathfrak{L}$ dans ces espaces). On a déjà traité le cas de la représentation de dimension 6, la représentation adjointe, qui est du type $I_2 \otimes D_3 + J_2 \otimes D_3$ où D_3 est la représentation adjointe de $\mathfrak{so}(3)$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, le symbole $I_2 \otimes D_3 + J_2 \otimes D_3$ signifiant que les éléments de $\mathfrak{so}(3)$ sont représentés par $I_2 \otimes D_3$, et les éléments Jx ($x \in \mathfrak{so}(3)$) le sont par $J_2 \otimes D_3(x)$. On aurait un résultat analogue avec la représentation $D_3 \otimes I_2 + D_3 \otimes J_2$, de dimension 6 elle aussi.

Avant de développer l'exemple en question, remarquons seulement que pour tout $\mathscr{R}_0$ de la forme ci-dessus, $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu$ commutera avec $\mathfrak{L}$, avec $\mathscr{P}_0$, et aussi avec $\mathscr{R}'_0$, donc avec tout $\mathfrak{U}$. Ainsi, prendre $\mathfrak{X} = \mathfrak{L}$ n'introduit pas « d'éclatage de masse ».

Prenons une base (q_μ) ($\mu = 1, \ldots, 4$) de $\mathscr{R}'_0$, et écrivons le produit semi-direct $\mathfrak{L}.(\mathscr{P}_0 \oplus \mathscr{R}'_0)$ à l'aide de la représentation $D_N \oplus D_4$ de $\mathfrak{L}$, où D_4 est une représentation de $\mathfrak{L}$ en dimension 4, décrite dans l'appendice (elle est irréductible par des transformations réelles, et non équivalente à D_N). Prenons alors $\varphi(\mathscr{P}) = \mathfrak{L}.\mathscr{P}_0$ dans $\mathfrak{U}$, $\psi(\mathfrak{L}')$ étant pris comme $(I + adq_0)\ \mathfrak{L}$, pour $q_0 \in \mathscr{R}'_0$, combinaison linéaire convenable des q_μ. Nous choisirons D_4 telle que l'on ait les relations de commutation suivantes, entre les (a_k, b_k) de $\mathfrak{L}$ et $\mathscr{R}'_0$:

$\diagdown\,]$ / $[\diagdown$	$2\,q_1$	$2\,q_2$	$2\,q_3$	$2\,q_4$
a_1	q_4	q_3	$-\,q_2$	$-\,q_1$
a_2	$-\,q_3$	q_4	q_1	$-\,q_2$
a_3	q_2	$-\,q_1$	q_4	$-\,q_3$
b_1	$-\,q_1$	q_2	q_3	$-\,q_4$
b_2	$-\,q_2$	$-\,q_1$	$+\,q_4$	$+\,q_3$
b_3	$-\,q_3$	$-\,q_4$	$-\,q_1$	$-\,q_2$

Posons $q_0 = -\,2(\delta q_1 + \gamma q_2 - \beta q_3 - \alpha q_4)$, $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R})$.

L'élément $\sum_{k=1}^{3} (\lambda_k\, a_k + \mu_k\, b_k)$ appartiendra à l'intersection si le système suivant est vérifié :

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1 - \beta\lambda_2 - \gamma\lambda_3 - \delta\mu_1 - \gamma\mu_2 + \beta\mu_3 = 0 \\ \beta\lambda_1 + \alpha\lambda_2 + \delta\lambda_3 + \gamma\mu_1 - \delta\mu_2 + \alpha\mu_3 = 0 \\ \gamma\lambda_1 - \delta\lambda_2 + \alpha\lambda_3 - \beta\mu_1 - \alpha\mu_2 - \delta\mu_3 = 0 \\ \delta\lambda_1 + \gamma\lambda_2 - \beta\lambda_3 + \alpha\mu_1 - \beta\mu_2 - \gamma\mu_3 = 0\,. \end{cases}$$

On voit alors que si (λ_k, μ_k) est solution, $(\mu_k, -\,\lambda_k)$ l'est aussi, et que par conséquent l'intersection est une sous-algèbre commutative de dimension 2, pour $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ convenables (ce qui est le cas général), car on peut alors par exemple calculer les $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1$ pour μ_2 et μ_3 donnés. Remarquons qu'on ne peut pas annuler tous les μ_k ou tous les λ_k, *a priori* : il n'existe pas de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ permettant ceci. Pour chaque élément (λ_k, μ_k), il y a une infinité de $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ le donnant comme faisant partie d'une intersection, pourvu que tous les λ_k ne soient pas nuls (ou tous les μ_k), comme on le voit aisément par un calcul simple.

Remarques. i) Si on essayait $D_N \oplus D_N$, on trouverait que l'intersection est dans ce cas en général de dimension 3 (au moins), et par conséquent on construit ainsi une $U(\mathscr{P}, \mathfrak{L}',\ \mathfrak{u}(1))$ (avec intersection de dimension 3) au lieu de $U(\mathscr{P}, \mathfrak{L}')$.

ii) Si on a une $U(\mathscr{P}, \mathfrak{L}')$, on aura immédiatement une $U(\mathscr{P}, \mathfrak{L}'_1 \oplus \mathfrak{L}'_2)$ par $\mathfrak{L}'_1 \oplus U(\mathscr{P}, \mathfrak{L}'_2)$ (ou vice versa). On voit sans difficulté qu'il n'y a pas d'autre solution.

12. Allure générale des unifications. Remarques sur leur construction. Soit $\mathfrak{X}$ semi-simple $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{L}$. Si $\mathfrak{X}$ a une représentation *réelle* de dimension 4 donnant D_N pour un des $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X}$, on peut former le produit semi-direct $\mathfrak{X}.\mathscr{P}_0$ (avec un idéal commutatif de dimension 4), correspondant à cette représentation, et ce sera une $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ non triviale, avec intersection sur $\mathfrak{L}$. C'est le cas de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$.

Si (ce cas est plus répandu) $\mathfrak{X}$ a une représentation *réelle* de dimension 8 ou 10 se décomposant en $D_N \oplus D_4$, ou $D_N \oplus ad$, sur un des $\mathfrak{L}$ contenus dans $\mathfrak{X}$, le produit semi-direct $\mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$, avec $\mathscr{R}_0$ commutatif de dimension 8 (resp. 10), correspondant à cette représentation est une unification $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ (resp. $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1))$) non triviale, avec intersection de dimension 2. Si $\mathfrak{X}$ a une représentation réelle de dimension 9, se décomposant en $D_N \oplus D_4 \oplus O(O$: représentation triviale en dimension 1) sur un des $\mathfrak{L}$ contenus dans $\mathfrak{X}$, le produit semi-direct $\mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$ qui lui correspond sera une unification $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$. En effet, on aura $\mathfrak{U} = \mathfrak{X} + (I + adq_0)\,(\mathfrak{L}.\mathscr{P}_0)$, dans le premier cas, l'intersection étant de dimension 2, et la même chose + $(\mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1))$ dans le 2e cas ; dans le dernier cas, on aura $\mathfrak{U} = \mathfrak{X} + (I + adq_0)\,(\mathfrak{L}.\mathscr{P}_0) + \mathfrak{u}(1)$ (même intersection).

Exemple. $\mathfrak{X} = \mathfrak{so}(4, 1)$, $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)) = \mathfrak{so}(4,1).\mathscr{R}_0$, avec $\mathscr{R}_0$ commutatif de dimension 10, la représentation définissant le produit semi-direct étant l'adjointe.

Prenons la base (a_k, a'_k, b_k, c_1) de $\mathfrak{so}(4, 1)$, les générateurs étant ceux figurant dans $\mathfrak{so}(4, 2)$, et (q_k, q'_k, p_k, p_4) pour $\mathscr{R}_0$. On voit de suite que, dans cette base, la représentation adjointe se décompose en $D_N \oplus ad_{\mathfrak{L}}$ sur le $\mathfrak{L} = (a_k, b_k)$. Faisons alors $\psi(\mathfrak{X}) = \mathfrak{so}(4,1)$ et $\varphi(\mathscr{P}) = (I + adq_0)\ (\mathfrak{L}.\mathscr{P}_0)$, dans $\mathfrak{U}$, où q_0 est une combinaison des q_k et des q'_k (à coefficients réels). Il est clair que c'est une $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1))$, et de plus on aura un invariant de la forme

$$\left(\sum_1^3 p_k^2 - p_4^2\right) + \sum_{k=1}^{3} (q_k^2 - q'^2_k)$$

car c'est une algèbre « orthogonale ». On aura un traitement analogue de $\mathfrak{so}(3, 2)$ (avec la représentation adjointe). On obtient ainsi un « *terme correctif* » à $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu$.

Supposons maintenant que l'on ait $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) = \mathfrak{U}$, avec $\mathfrak{X}$ simple, $\mathfrak{U}$ non triviale et non banale (donc différente de $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$ et de $\mathfrak{X}$ — ou $\mathscr{P}$ —). D'une façon générale, on a $\mathfrak{U} = \mathscr{R}.\mathscr{R}_0$, où $\mathscr{R}$ est une sous-algèbre de Levi, et $\mathscr{R}_0$ le radical (idéal résoluble). Ecrivons $\mathfrak{U} = \varphi(\mathscr{P}) + \psi(\mathfrak{X})$. Deux choses sont possibles : ou on peut prendre $\mathscr{R}$ telle que $\mathscr{R} = \psi(\mathfrak{X})$, ou $\mathscr{R} \supset \psi(\mathfrak{X})$.

1er *cas.* $\mathfrak{U} = \psi(\mathfrak{X}).\mathscr{R}_0$.

Si $\mathfrak{X} \supset (\approx \mathscr{P})$, $\mathscr{R}_0$ est *a priori* résoluble quelconque, assujetti à la seule condition que le produit soit semi-direct sans être direct (et évidemment que ce soit bien une unification). Car si $\mathfrak{U} \approx \psi(\mathfrak{X}) \oplus \mathscr{R}_0$, on doit avoir

$$\mathscr{P} \ni p \rightsquigarrow \varphi(p) = r_0(p) + x(p),$$

r_0 et x étant des homomorphismes de $\mathscr{P}$ sur $\mathscr{R}_0$ et dans $\psi(\mathfrak{X})$, respectivement, ce qui est impossible si $\mathscr{R}_0 \neq \{0\}$ (car alors $\mathscr{R}_0 \approx \mathscr{P}$ ou $\mathfrak{L}$, et n'est pas résoluble) ; on doit donc avoir une représentation non triviale

$$\psi(\mathscr{P}) \to \text{Dér}\,(\mathscr{R}_0) \subset \mathfrak{gl}(\mathscr{R}_0)\,.$$

Or dim $\mathscr{R}_0 \leqslant 10$, et de plus $10 - \dim \mathscr{R}_0$ doit être la dimension d'une sous-algèbre de $\mathscr{P}$, donc être différent de 5, 7, 8, 9. Comme $\mathfrak{X} \supset \approx \mathscr{P}$, on devra avoir dim $\mathscr{R}_0 \geqslant 5$ si $\mathscr{R}_0 \neq \{0\}$ (car la plus petite dimension des représentations *réelles* de $\mathscr{P}$ est 5) ; donc dim $\mathscr{R}_0 \geqslant 6$.

En résumé, si $\mathfrak{X} \supset (\approx \mathscr{P})$ et si $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$, $\mathscr{R}_0$ devra être *résoluble de dimension* $\leqslant 10$ *et* $\geqslant 6$ (telle que évidemment $\mathfrak{X}.\mathscr{R}_0 = \mathfrak{X} + \varphi(\mathscr{P})$) *ou nulle* (cas banal $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{X}$).

Si $\mathfrak{X} \not\supset (\approx \mathscr{P})$, on devra avoir $\mathscr{R}_0 \supset \mathscr{P}_0$, et le produit semi-direct $\mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$ devra être donné par une représentation de $\mathfrak{X}$ contenant D_N sur un des $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{X}$ (ici nécessairement, $\mathfrak{X} \supset \mathfrak{L}$ car c'est la partie semi-simple de l'unification), ce qui, ici aussi, exclut la somme directe $\mathfrak{X} \oplus \mathscr{R}_0$.

2e ***cas.*** Toute sous-algèbre de Levi de $\mathfrak{U}$ contenant $\psi(\mathfrak{X})$ la contient strictement. Donc $\mathfrak{U} = \mathscr{R}.\mathscr{R}_0$ avec $\mathscr{R} \supset \psi(\mathfrak{X})$.

Si alors $\mathscr{R} \not\supset (\approx \mathscr{P})$, $\mathscr{R}_0 \supset \mathscr{P}_0$ et on devra avoir $\mathfrak{L}.\mathscr{P}_0$ avec un $\mathfrak{L}$ de $\mathscr{R}$ (donc produit semi-direct non direct) ; d'où dim $\mathscr{R}_0 \geqslant 4$, donc on a dim $\mathscr{R}$ − dim $\mathfrak{X} \leqslant 6$. Les seules possibilités d'un tel « saut » de $\mathfrak{X}$ à $\mathscr{R}$ sont de $\mathfrak{su}(2, 1)$ à $\mathfrak{g}_{2,2}$, possibilité exclue car $\mathfrak{g}_{2,2} \not\supset \mathfrak{L}$, ou encore de $\mathfrak{X}$ de type $\mathfrak{b}_2$ ou $\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_3$ à (respectivement) $\mathscr{R}$ de type $\mathfrak{b}_3$ ou $\mathfrak{b}_3$: eu égard aux dimensions des représentations de ces algèbres, le seul cas envisageable est de voir si $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R}).\mathscr{P}_0$ (« $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$ inhomogène ») peut être unification de $\mathscr{P}$ et de $\mathfrak{so}(3, 2)$, avec intersection de dimension 1 : ce n'est pas possible, d'après la structure de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$.

Dans ce 2e cas, on ne peut donc avoir que $\mathscr{R} \supset (\approx \mathscr{P})$. Donc, si $\mathscr{R}_0 \neq \{0\}$, dim $\mathscr{R}_0 \geqslant 5$, et $10 - \dim \mathscr{R}_0 - (\dim \mathscr{R} - \dim \mathfrak{X}) \neq 5, 7, 8, 9$, d'où, comme avant, $10 \geqslant \dim \mathscr{R}_0 + (\dim \mathscr{R} - \dim \mathfrak{X}) \geqslant 6$, et la classification des algèbres de Lie simples (ainsi que des dimensions de leurs représentations de base) montre que ceci exige dim $\mathscr{R}_0 = 0$.

En résumé, 3 types d'unifications $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) = \mathfrak{U}$, non triviales et non banales, seulement peuvent exister, *a priori* :

(UI), $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$ où $\mathscr{R}_0$ résoluble, $6 \leqslant \dim \mathscr{R}_0 \leqslant 10$, et $\mathfrak{X} \supset (\approx \mathscr{P})$.
(UII), $\mathfrak{U} \approx \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$, $\mathfrak{X} \not\supset (\approx \mathscr{P})$, $\mathscr{R}_0 \supset \mathscr{P}_0$ et le produit semi-direct donnant $\mathscr{P}$ avec un $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{X}$ (nécessairement, $\mathfrak{X} \supset (\approx \mathfrak{L})$).
(UIII), $\mathfrak{U}$ simple contenant (strictement) $(\approx \mathfrak{X})$ — et évidemment $\mathfrak{U} \supset (\approx \mathscr{P})$.

Sous réserve de vérifier que dans ce qui suit, on obtient bien des unifications (il faut pour cela étudier les positions respectives possibles de $\mathscr{P}$ et de $\mathfrak{X}$ dans chaque $\mathfrak{U}$), le type (UI) est *a priori* celui de $\mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(5, \mathbf{R})$, avec une représentation de dimension 10 pour donner le produit semi-direct, de $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ $(6 \leqslant n \leqslant 10)$ avec la représentation de base, de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{C})$, $\mathfrak{sl}(5, \mathbf{C})$, $\mathfrak{sp}(5, \mathbf{R})$, $\mathfrak{so}(p, q)$ avec $p \geqslant 4$, $q \geqslant 2$ et $p + q \leqslant 10$, $\mathfrak{su}(2, 2)$ et $\mathfrak{su}(3, 2)$, avec les représentations réelles de base. Le type (UII) est, comme on l'a vu, celui de $\mathfrak{L}$, de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$, et peut-être d'autres algèbres. Le type (UIII) est

celui de $\mathfrak{su}(2, 1)$, $\mathfrak{g}_{2,2}$, et peut être (ce sont là les seules éventualités — il faut encore, ici aussi, vérifier si l'on a bien des unifications —) de $\mathfrak{X} = \mathfrak{so}(p, q)$ et $\mathfrak{U} = \mathfrak{so}(p + 1, q)$ ou $\mathfrak{so}(p, q + 1)$, où $p \geqslant q$, $p + q \leqslant 10$, $p + 1 \geqslant 4$ et $q \geqslant 2$ dans le 1er cas, et $p \geqslant 4$, $q + 1 \geqslant 2$ dans le 2e cas, ou encore $\mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$ et $\mathfrak{U} = \mathfrak{sl}(5, \mathbf{R})$, ou $\mathfrak{su}(3,1)$ (ou $\mathfrak{su}(2, 2)$) et $\mathfrak{su}(3, 2)$.

APPENDICE AU CHAPITRE II

QUELQUES ALGÈBRES DE LIE

Nous concentrerons notre étude autour d'un pôle double, celui constitué par deux formes réelles de l'algèbre $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{d}_3$, à savoir la forme normale $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R}) \approx \mathfrak{so}(3, 3)$, et la forme « conforme », l'algèbre $\mathfrak{su}(2, 2) \approx \mathfrak{so}(4, 2) = \mathscr{S}$. Dans la première, nous retrouverons $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$, $\mathfrak{so}(3, 2)$, et £, et dans la seconde nous retrouverons $\mathscr{P}$, $\mathfrak{so}(3, 2)$, $\mathfrak{so}(4, 1)$ — entre autres. Nous expliciterons également, sous une forme « condensée », certaines représentations de base — dont une partie, d'ailleurs, nous a servi de point de départ pour obtenir les relations de commutation. Faisons auparavant deux remarques sur la présentation, avant de passer à l'exposé du contenu, lequel sera présenté de façon plutôt sèche car il s'agit là de choses connues ou immédiatement accessibles à partir de ce qui est connu, que nous ne présentons qu'en tant qu'outil ayant servi à l'élaboration de certains points de notre travail.

Les « tableaux » donnant les relations de commutation dans une certaine base sont des tableaux antisymétriques : on fait le crochet en mettant à gauche l'élément repérant la ligne, et à droite celui repérant la colonne.

Ces tableaux sont relatifs à une certaine base, en fonction de laquelle nous avons donné certaines représentations fondamentales des algèbres en question. Celles-ci sont réalisées de la façon suivante, sous forme d'une grande matrice : si l'élément x est représenté par une matrice dont le coefficient est λ en un certain endroit, on inscrit λx à cet endroit ; si de plus pour y on a μ à ce même endroit, on écrira $\lambda x + \mu y$, etc. Si la base est bien choisie, et l'algèbre simple (ou semi-simple), on obtiendra tous les invariants fondamentaux de l'algèbre (c'est-à-dire une base de l'anneau de polynômes qui est le centre de l'algèbre enveloppante) comme coefficients du polynôme caractéristique formel symétrisé (c'est-à-dire que l'on met $\frac{1}{2}(xy + yx)$ au lieu de xy, etc.) de la « matrice » ainsi construite — cette méthode est due à G. Racah.

Représentations en dimension 4 *et* 6 *de* $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R}) \approx \mathfrak{so}(3, 3)$.

Nous avons posé

$$\alpha_k = \tfrac{1}{2}(a_k - a'_k)\,, \quad \alpha'_k = \tfrac{1}{2}(a_k + a'_k)$$

$$\beta_k = \tfrac{1}{2}(b_k - b'_k)\,, \quad \beta'_k = \tfrac{1}{2}(b_k + b'_k) \quad (k = 1, 2, 3)\,,$$

et $$\gamma_k = \tfrac{1}{2}(d_k + d_i - d_j)$$ (*ijk* cycliques)

d_1	$-a_3+b'_3$	$a_2+b'_2$	$b_1-a'_1$
$a_3+b'_3$	d_2	b'_1-a_1	$b_2-a'_2$
$-a_2+b'_2$	b'_1+a_1	d_3	$b_3-a'_3$
$b_1+a'_1$	$b_2+a'_2$	$b_3+a'_3$	$-d_1-d_2-d_3$

0	$-\alpha_3$	α_2	γ_2	β_3	$-\beta'_2$
α_3	0	$-\alpha_1$	$-\beta'_3$	γ_3	β_1
$-\alpha_2$	α_1	0	β_2	$-\beta'_1$	γ_1
γ_2	$-\beta'_3$	β_2	0	$-\alpha'_3$	α'_2
β_3	γ_3	$-\beta'_1$	α'_3	0	$-\alpha'_1$
$-\beta'_2$	β_1	γ_1	$-\alpha'_2$	α'_1	0

Les « générateurs compacts » (générateurs d'une sous-algèbre compacte maximale, dont les sous-groupes à un paramètre associés par l'exponentielle sont compacts), sont ici (a_k, a'_k), soit (α_k, α'_k) (sous cette dernière forme, on voit nettement la forme classique de $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$ dans $\mathfrak{so}(3,3)$).

Avec la représentation en dimension 4 [resp. 6], on aura $D_N(\pounds)$ [resp. $ad\pounds$] avec (a_k et b_k) (car $a_k = \alpha_k + \alpha'_k$ et $b_k = \beta_k + \beta'_k$). On a une sous-algèbre isomorphe à £ en prenant (au lieu des a_k et b_k), par exemple :

$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \; ; \; \beta'_2 - \beta_1, -\gamma_1)$, ou $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \; ; \; -\beta'_3, \gamma_3, \beta_1)$,
ou $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \; ; \; \gamma_2 - \beta'_3, \beta_2)$, ou $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \; ; \; \gamma_2, \beta_3, -\beta'_2)$,
ou $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \; ; \; \beta_3, \gamma_3, -\beta'_1)$, ou $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 \; ; \; \beta_2, -\beta'_1, \gamma'_1)$.

Deux quelconques d'entre elles ayant même sous-algèbre compacte (α_k ou α'_k) engendrent une algèbre $\mathfrak{so}(3, 2)$ avec un 10e élément (qui sera un α'_j ou α_j, d'indice celui qui est répété 3 fois dans la partie non compacte). En prenant, avec ce que l'on a écrit, une représentation de dimension 4 des £ écrits à la 1re des 3 lignes ci-dessus, on voit que c'est (respectivement) $D_2 \otimes I_2 + D_2 \otimes J_2$, et $I_2 \otimes D_2 + J_2 \otimes D_2$, où D_2 est la représentation suivante de $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

TABLE I. $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$.

$[\ ,\ ]$	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	a'_1	a'_2	a'_3	b'_1	b'_2	b'_3	d_1	d_2	d_3
a_1	0	a_3	$-a_2$	0	b_3	$-b_2$	0	a'_3	$-a$	$-2(d_2-d_3)$	$-b'_3$	b'_2	0	b'_1	$-b'_1$
a_2	$-a_3$	0	a_1	$-b_3$	0	b_1	$-a'_3$	0	a'_1	b'_3	$-2(d_3-d_1)$	$-b'_1$	$-b'_2$	0	b'_2
a_3	a_2	$-a_1$	0	b_2	$-b_1$	0	a'_2	$-a'_1$	0	$-b'_2$	b'_1	$-2(d_1-d_2)$	b'_3	$-b'$	0
b_1	0	b_3	$-b_2$	0	$-a_3$	a_2	$2d_1$	b'_3	b'_2	0	a'_3	a'_2	$2a'_1$	a'_1	a'_1
b_2	$-b_3$	0	b_1	a_3	0	$-a_1$	b'_3	$2d_2$	b'_1	a'_3	0	a'_1	a'_2	$2a'_2$	a'_2
b_3	b_2	$-b_1$	0	$-a_2$	a_1	0	b'_2	b'_1	$2d_3$	a'_2	a'_1	0	a'_3	a'_3	$2a'_3$
a'_1	0	a'_3	$-a'_2$	$-2d_1$	$-b'_3$	$-b'_2$	0	a_3	$-a_2$	0	b_3	b_2	$2b_1$	b_1	b_1
a'_2	$-a'_3$	0	a'_1	$-b'_3$	$-2d_2$	$-b'_1$	$-a_3$	0	a_1	b_3	0	b_1	b_2	$2b_2$	b_2
a'_3	a'_2	$-a'_1$	0	$-b'_2$	$-b'_1$	$-2d_3$	a_2	$-a_1$	0	b_2	b_1	0	b_3	b_3	$2b_3$
b'_1	$2(d_2-d_3)$	$-b'_3$	b'_2	0	$-a'_3$	$-a'_2$	0	$-b_3$	$-b_2$	0	a_3	$-a_2$	0	a_1	$-a_1$
b'_2	b'_3	$2(d_3-d_1)$	$-b^1$	$-a'_3$	0	$-a'_1$	$-b_3$	0	$-b_1$	$-a_3$	0	a_1	$-a_2$	0	a_2
b'_3	$-b'_2$	b'_1	$2(d_1-d_2)$	$-a'_2$	$-a'_1$	0	$-b_2$	$-b_1$	0	a_2	$-a_1$	0	a_3	$-a_3$	0
d_1	0	b'_2	$-b'_3$	$-2a'_1$	$-a'_2$	$-a'_3$	$-2b_1$	$-b_2$	$-b_3$	0	a_2	$-a_3$	0	0	0
d_2	$-b'_1$	0	b'_3	$-a'_1$	$-2a'_2$	$-a'_3$	$-b_1$	$-2b_2$	$-b_3$	$-a_1$	0	a_3	0	0	0
d_3	b'_1	$-b'_2$	0	$-a'_1$	$-a'_2$	$-2a'_3$	$-b_1$	$-b_2$	$-2b_3$	a_1	$-a_2$	0	0	0	0

La représentation, considérée à titre d'exemple, de £, et notée D_4, peut s'écrire $(\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3 ; \gamma_2, \beta_3, -\beta'_2)$; elle peut s'obtenir à l'aide de la représentation « canonique » (soit comme le fait Helgason ([19])) de $\mathfrak{so}(3, 2)$ comme $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{R})$. Elle n'est pas équivalente à D_N.

Cas de $\mathfrak{su}(2, 2) \approx \mathfrak{so}(4, 2) \approx \mathscr{S}$.

Conservons la notation $(\alpha\beta\gamma\alpha'\beta')$ pour $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$. On peut représenter les générateurs $(a_k, a'_k, b_k, b'_k, c_k)$ de $\mathscr{S}$ dans $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{C})$ par (les a_k etc, ne sont plus les mêmes que pour $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$) les 2 façons suivantes (entre autres) :

$a_1 = i\gamma_3$ (ou $i\gamma_3$)	$a'_1 = -\alpha'_2$ ou $-i\gamma_2$	
$a_2 = -\alpha'_3$ (ou $-\alpha'_3$)	$a'_2 = i\beta_1$ ou $-\alpha_3$	
$a_3 = i\beta'_3$ (ou $i\beta'_3$)	$a'_3 = \alpha'_1$ ou $-i\beta_3$	$c_2 = \alpha_2$ ou $i\gamma_1$
$b_1 = \gamma_2$ ou $-i\alpha'_2$	$b'_1 = \beta_2$ (ou β_2)	$c_1 = \beta'_2$ ou $-\beta'_2$.
$b_2 = -i\alpha_3$ ou $-\beta_1$	$b'_2 = i\alpha_1$ (ou $i\alpha_1$)	$c_3 = \gamma_1$ ou $-i\alpha_2$
$b_3 = \beta_3$ ou $i\alpha'_1$	$b'_3 = -\beta'_1$ (ou $-\beta'_1$)	

Posons $p_k = a'_k + b'_k$, $p_4 = c_1 + c_2$. Dans la première façon, les p_μ sont représentés par des matrices triangulaires ; (a_k, b_k, p_μ) donne $\mathscr{P}$; pour ce qui est de ce dernier, on peut, si l'on veut, multiplier les p_μ par un même facteur complexe. La 2e façon est la façon « canonique » (cf. ([19])) ; sous cette forme, une sous-algèbre $\mathfrak{su}(2,1)$ est immédiatement visible ; on en a donné une expression dans le cours du chapitre. Dans ce qui suit, nous avons donné la représentation de dimension 4 de $\mathscr{S}$, correspondant à la première des 2 façons citées ici de l'exprimer dans $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{C})$, en fonction de $q_0 = c_3$ et des p_μ et des q_μ : $q_k = b'_k - a'_k$, $q_4 = c_2 - c_1$ (pour le calcul des invariants, il faudra « normaliser » les p_μ et q_μ — qui sont nilpotents — en supprimant le facteur 2 devant eux). Nous en avons aussi donné une en dimension 6, et avons exprimé la table de multiplication de $\mathscr{S}$ dans la base $(a_k, ..., c_k)$, où des sous-algèbres de type b_2 sont particulièrement apparentes. On retrouve aisément, en passant à la base (a_k, b_k, q_μ, q_0), les relations de commutation trouvées à l'appendice du 1er chapitre, où $\mathscr{P}$ apparaît comme sous-algèbre.

Représentations de $\mathscr{S} \approx \mathfrak{su}(2, 2)$

$\frac{1}{2}$

$ia_1 - b_1 + q_0$	$a_2 + ib_2$ $+ ia_3 - b_3$	$2(- p_1 + p_4)$	$2(ip_2 - p_3)$
$- a_2 - ib_2$ $+ ia_3 - b_3$	$- ia_1 + b_1$ $+ q_0$	$- 2(ip_2 + p_3)$	$2(p_1 + p_4)$
$- 2(q_1 + q_4)$	$2(iq_2 - q_3)$	$ia_1 + b_1 - q_0$	$a_2 - ib_2$ $+ ia_3 + b_3$
$- 2(iq_2 + q_3)$	$2(q_1 - q_4)$	$- a_2 + ib_2$ $+ ia_3 + b_3$	$- ia_1 - b_1 -$ $- q_0$

On a $\mathscr{P}$ avec (a_k, b_k, p_μ) par exemple.

0	$- a'_1$	$- a'_2$	$- a'_3$	c_1	$- c_3$
a'_1	0	$- a_3$	a_2	b_1	b'_1
a'_2	a_3	0	$- a_1$	b_2	b'_2
a'_3	$- a_2$	a_1	0	b_3	b'_3
c_1	b_1	b_2	b_3	0	c_2
$- c_3$	b'_1	b'_2	b'_3	$- c_2$	0

On a $D_N(\mathfrak{L})$ avec (a_k, b_k) ici ; on aura $\mathfrak{so}(4, 1)$ avec, par exemple, $(a_k, a'_k ; b_k, c_1)$ et $\mathfrak{so}(3, 2)$ avec, par exemple, $(a_k, c_2 ; b_k, b'_k)$.

TABLE II. $\mathfrak{su}(2, 2)$.

[\ ]	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	a'_1	a'_2	a'_3	c_1	b'_1	b'_2	b'_3	c_2	c_3
a_1	0	a_3	$-a_2$	0	b_3	$-b_2$	0	a'_3	$-a'_2$	0	0	b'_3	$-b'_2$	0	0
a_2	$-a_3$	0	a_1	$-b_3$	0	b_1	$-a'_3$	0	a'_1	0	$-b'_3$	0	b'_1	0	0
a_3	a_2	$-a_1$	0	b_2	$-b_1$	0	a'_2	$-a'_1$	0	0	b'_2	$-b'_1$	0	0	0
b_1	0	b_3	$-b_2$	0	$-a_3$	a_2	c_1	0	0	a'_1	c_2	0	0	b'_1	0
b_2	$-b_3$	0	b_1	a_3	0	$-a_1$	0	c_1	0	a'_2	0	c_2	0	b'_2	0
b_3	b_2	$-b_1$	0	$-a_2$	a_1	0	0	0	c_1	a'_3	0	0	c_2	b'_3	0
a'_1	0	a'_3	$-a'_2$	$-c_1$	0	0	0	a_3	$-a_2$	b_1	c_3	0	0	0	$-b'_1$
a'_2	$-a'_3$	0	a'_1	0	$-c_1$	0	$-a_3$	0	a_1	b_2	0	c_3	0	0	$-b'_2$
a'_3	a'_2	$-a'_1$	0	0	0	$-c_1$	a_2	$-a_1$	0	b_3	0	0	c_3	0	$-b'_3$
c_1	0	0	0	$-a'_1$	$-a'_2$	$-a'_3$	$-b_1$	$-b_2$	$-b_3$	0	0	0	0	$-c_3$	$-c_2$
b'_1	0	b'_3	$-b'_2$	$-c_2$	0	0	$-c_3$	0	0	0	0	$-a_3$	a_2	$-b_1$	$-a'_1$
b'_2	$-b'_3$	0	b'_1	0	$-c_2$	0	0	$-c_3$	0	0	a_3	0	$-a_1$	$-b_2$	$-a'_2$
b'_3	b'_2	$-b'_1$	0	0	0	$-c_2$	0	0	$-c_3$	0	$-a_2$	a_1	0	$-b_3$	$-a'_3$
c_2	0	0	0	$-b'_1$	$-b'_2$	$-b'_3$	0	0	0	c_3	b_1	b_2	b_3	0	$-c_1$
c_3	0	0	0	0	0	0	b'_1	b'_2	b'_3	c_2	a'_1	a'_2	a'_3	c_1	0

« ... *What we are doing can be compared with those complicated models invented to explain the hydrogen spectra which turned out to satisfy very simple regularities.* »
R. P. FEYNMAN.

CHAPITRE TROISIÈME

APPLICATIONS A LA THÉORIE DES INTERACTIONS FORTES

A) POSITION DU PROBLÈME PHYSIQUE, ET PREMIÈRES APPLICATIONS

1. Les interactions fortes et leurs modèles. On rencontre dans la nature diverses sortes d'interactions entre les particules. Parmi ces interactions, il existe une hiérarchie, dont l'ordre est donné par le carré de la constante de couplage de l'interaction, G^2 (sous la forme où elle apparaît dans l'hamiltonien). Expérimentalement, la hiérarchie des interactions des particules élémentaires est donnée par la classification suivante (en prenant des unités telles que $\hbar = c = 1$) :

i) *interactions fortes*, qui elles-mêmes se divisent en interactions très fortes (comme par exemple les interactions pion-baryon), pour lesquelles $G^2 \simeq 15$, et interactions moyennement fortes (comme par exemple kaon-baryon), où $G^2 \simeq 3$ (ces dénominations ne sont pas celles que l'on utilise — cf. introduction — dans les modèles où l'on obtient la « formule de masse » en brisant la symétrie : dans ce dernier cas, ce que l'on appelle interactions « très fortes » sont des interactions hypothétiques, qui seraient plus fortes que ce que l'on appelle ici interactions fortes).

ii) *interactions électromagnétiques* ; le photon interagit avec les particules chargées, et la force de l'interaction est caractérisée par la constante de structure fine, qui, dans nos unités, est $e^2 = \frac{1}{137}$.

iii) *interactions faibles*, comme par exemple l'absorption d'un neutrino par un nucléon, ou la désintégration des particules instables ; ici, $G^2 \simeq 10^{-12}$.

iv) enfin, les forces *d'attraction* dues à la *gravitation* universelle (interactions de gravitation) ; bien qu'ici $G^2 \simeq 10^{-39}$, ces forces peuvent jouer un rôle dans la structure des particules élémentaires.

Dans notre travail, nous nous intéresserons essentiellement à l'étude des interactions fortes (et dans une moindre mesure — seulement en ce qui concerne la formule de masse — des interactions électromagnétiques) ; et ce, pour deux raisons principales : d'une part, on a beaucoup plus d'informations expérimentales sur ces interactions (par exemple, les interactions fortes pion-baryon sont étudiées par des expériences sur les forces nucléaires ou par des processus de dispersion — « scattering » —), alors que les informations expérimentales sur les interactions faibles sont moins nombreuses et moins précises et décisives ; d'autre part, le principal moyen théorique d'étude des interactions est fourni par leurs lois de conservation, alors que plus on descend dans la hiérarchie, moins sont nombreuses les quantités conservées. En vertu du théorème de Nœther (que nous citerons plus loin), ou de la théorie de Yang et Mills et de l'extension qui en a été faite par Sakuraï, il est bien plus aisé de baser une théorie, tant du point de vue de la théorie des champs que de celui de la théorie des groupes, sur des interactions qui conservent beaucoup de quantités plutôt que sur des interactions qui en violent une partie. Ces raisons principales, et d'autres qui en découlent, nous amènent à étudier la théorie des interactions fortes.

Précisons tout d'abord le lien entre les lois de conservation d'une part et la théorie des symétries d'autre part. Bien que nous exprimions les lois de façon classique, il est également très facile de les énoncer pour des champs quantifiés. Soit $\mathscr{L}(\psi_\alpha, \partial_\mu \psi_\alpha)$ la densité de lagrangien d'un système classique ; dans un tel cas, les équations de mouvement dérivent d'un principe variationnel, celui de moindre action, c'est-à-dire que l'intégrale

$$W = \frac{1}{ic} \int \mathscr{L}(\psi_\alpha, \partial_\mu \psi_\alpha) \, d_4x$$

doit être minimale. Supposons alors que le système soit invariant par rapport à un groupe de transformations, que, pour simplifier, on considérera comme un groupe de Lie local (au voisinage de l'identité — groupe « infinitésimal » —) :

$$x_\mu \rightsquigarrow x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu , \quad \text{et} \quad \psi_\alpha(x) \rightsquigarrow \psi'_\alpha(x') = \psi_\alpha(x) + \delta\psi_\alpha(x) ;$$

par « système invariant » on entend que l'intégrale W est conservée. Alors, après transformation du domaine d'intégration à celui de la variable x' (et multiplication par le jacobien correspondant et utilisation du théorème de Gauss), on arrive au *théorème de Nœther* :

THÉORÈME. *La quantité*

$$\frac{1}{ic} F_4 = \frac{1}{ic} \int \left[\left(\mathscr{L}\delta_{4\nu} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_4 \psi_\alpha} \partial_\nu \psi_\alpha \right) \delta x_\nu + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \partial_4 \psi_\alpha} \delta\psi_\alpha \right] d\tau$$

est une intégrale première du mouvement.

C'est-à-dire plus généralement que tout groupe continu (connexe) de symétrie qui laisse invariant un système induit une loi de conservation d'une certaine quantité physique F_4, que l'on peut calculer si l'on se donne la forme explicite de $\mathscr{L}$.

Nous sommes ainsi amenés à rechercher (phénoménologiquement) quelles sont les lois de conservation des interactions fortes. Ce sont :

i) *L'isospin I* ; on est parti de l'idée de Heisenberg selon laquelle le proton p et le neutron n sont deux états d'une même particule (appelée souvent nucléon, N), leurs masses étant très voisines. On les considère donc comme un doublet d'une quantité abstraite définie comme « spin isotopique » I (qui vaut donc ici $\frac{1}{2}$), et on dit que $I_3 = +\frac{1}{2}$ pour p et $I_3 = -\frac{1}{2}$ pour n. Comme, d'après son origine nucléonique, cette quantité est l'analogue physique du spin de l'électron et, que d'après la spectroscopie, on connaît les propriétés mathématiques du moment angulaire, par analogie, on a introduit le groupe de spin isotopique SU(2) agissant sur un espace abstrait complexe à deux dimensions, espace du spin isotopique ; le proton et le neutron diffèrent seulement par la « troisième composante » I_3. Les interactions fortes conservent le « vecteur » de spin isotopique $\boldsymbol{I}$ (qui a été défini, de façon analogue à ce que l'on a fait pour p et n, pour les autres particules) : $\Delta I = 0$.

ii) *Le nombre baryonique B.* Parmi les particules qui sont des fermions, on distingue phénoménologiquement entre les plus lourds (baryons), qui interviennent dans les interactions fortes, et les plus légers (leptons), qui n'y interviennent pas. On définit alors (phénoménologiquement) la charge baryonique comme étant + 1 pour les baryons, − 1 pour les antibaryons, et 0 pour les autres particules : les interactions fortes conservent (de façon additive) le nombre baryonique B.

iii) *L'étrangeté S.* Avec la découverte de l'hypéron Λ, on a introduit (toujours de façon phénoménologique) la notion d'étrangeté S. Elle est en fait *définie* par la relation de Gell-Mann-Nishijima, qui s'écrit, pour les particules qui ne sont pas des leptons, $Q = I_3 + \frac{B+S}{2}$, où Q est la charge électrique. On a trouvé expérimentalement que les interactions fortes conservent S, et par conséquent la charge électrique Q.

iv) *Lois de conservation discrètes.* Outre les quantités que l'on vient de voir (et qui, comme on l'expliquera plus loin, seront prises comme lois de conservation « continues », liées à des groupes continus de symétrie) les interactions fortes vérifient aussi des lois de conservation « discrètes », liées à des groupes discrets de symétrie des champs des particules qui interviennent dans les interactions fortes considérées.

Supposons que la théorie des interactions fortes soit invariante sous le groupe de Lorentz propre (c'est lui, ou le groupe de Poincaré qui définit le spin et la masse des particules, qu'on appelle « groupe de symétrie externe »,

car il ne fait pas intervenir les propriétés découvertes plus tard — spin isotopique, étrangeté, etc. — que l'on relie à l'existence d'un groupe de symétrie dit interne, comme on l'expliquera plus loin). Dans ce cas, d'après le théorème de Lüders (que l'on a cité au premier chapitre), toute théorie des champs est invariante sous l'application successive des opérations discrètes P, C, T (externes). Les interactions fortes conservent (multiplicativement) *séparément* les opérations discrètes P, C, T externes.

En outre, on peut associer une « parité » à l'espace abstrait de spin isotopique introduit plus haut, « parité » que l'on appelle « isoparité » (selon Michel) ou « G-parité » (selon Yang). Cette « parité » est définie seulement pour les mésons non étranges. Cette sorte de « parité interne » est elle aussi conservée par les interactions fortes.

De plus, Bronzan et Low ([24]) ont proposé une nouvelle loi de conservation discrète, qui définit une loi de sélection pour des bosons interagissant fortement. Les résultats expérimentaux dont on dispose montrent que les interactions fortes conservent (multiplicativement) le nombre quantique de Bronzan et Low.

La théorie de Yang et Mills et ses prolongements. La théorie moderne des interactions fortes a commencé à être basée théoriquement avec le travail désormais classique de Yang et Mills ([36]) et la généralisation immédiate qui en a été donnée par Sakuraï ([35]). Comme on le sait par la théorie de l'électrodynamique quantique, les équations du champ électromagnétique libre, et la condition de Lorentz ($\partial_\mu A_\mu = 0$) sont invariantes par des transformations de jauge de seconde espèce $A_\mu \rightsquigarrow A_\mu + \partial_\mu \varepsilon(x)$, où $\varepsilon(x)$ est un « c-nombre fonction scalaire » solution arbitraire de l'équation $\Box\varepsilon(x) = 0$, définie sur l'espace de Minkowski ; cette propriété assure que la masse au repos du photon est nulle. Si le champ électromagnétique est couplé à un autre champ matériel, on voudra évidemment que le lagrangien total soit invariant, pour conserver la nullité de la masse au repos du photon ; ceci nous oblige à exiger pour le champ matériel l'invariance par rapport aux transformations de jauge de première espèce : $\psi_\alpha \rightsquigarrow \exp(ie\varepsilon(x))\ \psi_\alpha$, $\psi_\alpha^* \rightsquigarrow \exp(-ie\varepsilon(x))\ \psi_\alpha^*$ (e = charge de l'électron ; on a fait $\hbar = c = 1$) ; ces deux conditions ensemble nous assurent l'invariance du lagrangien total.

Le raisonnement inverse a été fait par Yang et Mills, et, en dépit de sa simplicité logique, il a donné un résultat révolutionnaire en théorie des interactions fortes. Si on considère les transformations de jauge de première espèce, agissant (pour simplifier l'explication) sur un champ classique, l'invariance par rapport à ces transformations nous montre que le champ complexe est défini à une phase près (ce qui est d'ailleurs clair, car les grandeurs physiques mesurables sont définies par des opérations sur des combinaisons « bilinéaires » $\psi^* \psi$). Yang et Mills ont donc postulé d'abord l'invariance par rapport aux transformations de jauge de première

espèce ; en outre, ils ont affirmé que, le formalisme de la théorie des champs ayant un caractère local, les valeurs de la phase en différents points de l'espace-temps sont totalement indépendantes, c'est-à-dire que ε est fonction des x_μ. A l'aide de ceci, ils ont démontré mathématiquement l'existence d'un champ vectoriel du type A_μ qui est couplé au champ complexe ψ_α, et subit une transformation de jauge de 2e espèce quand ψ_α en subit une de première espèce. Le couplage entre les deux champs est de « type courant », c'est-à-dire que l'on remplace $\partial_\mu \psi$ par $(\partial_\mu - ie\, A_\mu)\, \psi$ (et la quantité conjuguée pour ψ^*). Comme on le sait, le champ complexe est associé à des particules chargées (le mot « charge » est pris ici au sens général, c'est-à-dire charge électrique, ou « isotopique », ou « baryonique », et cette charge est conservée dans le formalisme que nous venons de décrire). Yang et Mills ont écrit leur article original seulement pour la propriété de spin isotopique, qui admet des transformations de jauge du type

$$\psi_\alpha \rightsquigarrow \exp(\mathrm{i} t_k\, \varepsilon_k(x))\, \psi_\alpha\,,$$

où $t_k = \frac{1}{2}\, \tau_k$ pour K, N, Ξ, $t_k = \theta_k$ pour π, Σ, et $t_k = 0$ pour les singulets, la définition de t_k pour les résonances se faisant de façon parallèle. Ils ont obtenu comme conséquence un champ vectoriel avec isospin 1, couplé comme précédemment au « courant d'isospin » qui est construit par tous les champs matériels d'isospin non nul ; tout ceci assure évidemment la conservation du spin isotopique. Ce qui est au fond révolutionnaire dans leur idée est l'idée physique suivante : une loi de conservation interne entraîne l'existence, basée sur le caractère local de la loi de conservation en question, d'une interaction vectorielle. C'est là l'explication du fait comment une symétrie interne reflète la dynamique « interne » du problème.

Ici il convient d'insister sur la différence entre la théorie habituelle des lois de conservation avant Yang et Mills, d'une part, et toutes les théories du genre « Yang et Mills » d'autre part. Par exemple, dans la théorie habituelle, la conservation du nombre baryonique est équivalente à une transformation du type $\psi_\alpha \rightsquigarrow \exp(ib\beta)\, \psi_\alpha$, où β est un paramètre réel, et b la charge baryonique, c'est-à-dire une transformation de *phase* (et de même pour l'isospin et l'hypercharge). A partir de cela, on obtient les lois de conservation par utilisation directe du théorème de Nœther, et bien entendu cette transformation de phase se traduit mathématiquement par le fait que l'algèbre de Lie du groupe de Lie correspondant est de dimension finie. D'autre part, si on examine sérieusement l'argument de Yang et Mills, $\psi_\alpha \rightsquigarrow \exp(ib\beta(x))\, \psi_\alpha$, où $\beta(x)$ est une certaine fonction réelle des x_μ, c'est-à-dire une transformation de *jauge*, outre l'existence d'un champ vectoriel qui subit une transformation de jauge de seconde espèce, on obtient que l'algèbre de Lie correspondant au groupe interne doit être de dimension infinie.

Passons maintenant aux principaux traits de la théorie de Sakuraï.

L'idée centrale de ce dernier est qu'il n'est point besoin de s'occuper de modèles de symétries élevées (hypothétiques), qui ne sont pas les groupes de symétrie des interactions fortes existantes, pour les « briser » sitôt après (cf. critique de ce fait plus loin) en vue de rendre compte des résultats expérimentaux sur les interactions fortes existantes. Au lieu de ceci, il faut étudier plus sérieusement les symétries. La méthode consistera à généraliser l'idée de Yang et Mills et à s'occuper de trois types d'invariance de jauge interne, liés au nombre baryonique, à l'hypercharge, et au spin isotopique. On obtiendra alors trois sortes de couplages, de telle manière que dans chacun un champ vectoriel avec masse est couplé linéairement au courant conservé (des types précédents) ; chacun d'eux sera caractérisé par une constante universelle. Comme les trois types précédents sont les seules symétries internes (continues) qui soient exactes (d'après Pais), le modèle proposé sera le plus simple possible. On peut donc écrire les trois lagrangiens fondamentaux des interactions fortes sous la forme :

$$\mathscr{L}_I = -f_I B_\mu^{(I)} J_\mu^{(I)}, \quad \mathscr{L}_Y = -f_Y B_\mu^{(Y)} J_\mu^{(Y)}, \quad \mathscr{L}_B = -f_B B_\mu^{(B)} J_\mu^{(B)},$$

où $B_\mu^{(I)}$ (par exemple) est le champ vectoriel relié au caractère local de la conservation du spin isotopique, et $J_\mu^{(I)}$ la densité de « courant d'isospin » créé par tous les champs d'isospin non nul ; f_B, f_Y, f_I sont les trois constantes universelles précitées, et l'expérience montre que $f_B^2 > f_Y^2 > f_I^2$.

Bien que la plus grande partie de la philosophie de Sakuraï coïncide avec la nôtre, en particulier pour ce qui est de sa critique des « symétries élevées », nous faisons appel à d'autres outils mathématiques et introduisons quelques principes physiques nouveaux (liaison entre les symétries interne et externe, etc.), car son étude ne peut plus rendre compte des nombreuses données expérimentales d'aujourd'hui. Actuellement, en raison de la sorte de « dualité » entre l'étude des interactions fortes des points de vue de la théorie des champs et des groupes de symétrie, on préfère étudier les modèles basés sur l'algèbre de Lie (de dimension finie pour simplifier) d'un groupe de symétrie interne ; or on a vu que la théorie de Yang et Mills impliquait implicitement une algèbre de Lie (interne) de dimension infinie : l'algèbre interne de dimension finie que l'on considère devra ainsi être en quelque sorte une « approximation » (plus du point de vue de sa structure que de celui de sa dimension) de cette dernière. Notre travail consiste essentiellement en le choix et l'étude d'une algèbre interne convenable.

2. Sur la classification des particules fortes (intervenant dans les interactions fortes). Nous nous posons la question de savoir quel est le lien explicite entre les particules fortes (baryons et mésons) d'une part et le groupe de symétrie (forte) interne de l'autre. Dans le paragraphe précédent, on a vu le lien entre l'existence d'une symétrie interne et celle de la loi de conservation correspondante (par exemple par le théorème de Nœther), et entre l'invariance de jauge (liée à une algèbre de Lie de dimension infinie)

et l'existence d'un champ vectoriel supplémentaire de type A_μ, c'est-à-dire une conséquence dynamique. D'après cela, il doit y avoir un lien plus direct entre le groupe fort et les particules qui interviennent dans les interactions fortes. Bien entendu, d'après ce qu'on vient de voir, le groupe doit être tel qu'il « conserve » les grandeurs B, Y et I. Supposons que l'on s'occupe d'un groupe continu (de symétrie) qui soit (pour simplifier — et c'est aujourd'hui une hypothèse courante) semi-simple, et considérons son algèbre de Lie ; désignons par l le rang de cette dernière : le centre de son algèbre enveloppante est isomorphe à un anneau de polynômes en l variables ; si on prend l éléments de ce centre indépendants polynômialement (les autres éléments du centre étant des polynômes en ces l éléments), leurs représentants dans toute représentation finie de l'algèbre sont des multiples de l'identité, et leurs valeurs propres peuvent être pris comme un ensemble de « nombres quantiques globaux » qui définissent les représentations. En gros, on peut dire qu'on classifie les particules selon les représentations de cette algèbre, car on les caractérise par leurs nombres quantiques, à l'aide desquels on exprime les « nombres quantiques globaux » qui définissent les représentations ; plus précisément, les représentations du groupe — ou de l'algèbre — sont des représentations dans un certain espace vectoriel de dimension finie, dont on considère les vecteurs de base comme des opérateurs, que l'on prend comme opérateurs de champs des particules appartenant à cette représentation (c'est-à-dire que l'espace de la représentation est pris comme $\mathscr{H} \otimes E$, où E est un espace vectoriel de dimension finie et $\mathscr{H}$ un espace d'opérateurs). Le processus des interactions s'écrira alors comme un processus de fusion, c'est-à-dire par la décomposition de Clebsch-Gordan du produit de Kronecker des représentations correspondant aux particules entrant en interaction.

Certains auteurs (comme Yamaguchi) ont voulu, utiliser (au lieu des groupes ou algèbres de Lie), les *groupes discrets*. Dans ce cas, un certain nombre de principes seront différents (par exemple, pour ce qui concerne les nombres quantiques). Yamaguchi, par exemple, s'est basé sur le modèle de Sakata, et a posé comme principe fondamental l'existence de trois « champs de chaos » x, y, z, base d'un certain espace vectoriel « opérationnel » tridimensionnel, et le principe de la trio-invariance : l'hamiltonien est invariant sous les permutations de ces 3 champs (groupe 3 !) ; il obtient les particules (p, n, Λ) en amenant la « self-représentation » (de dimension 3) du groupe 3 ! sous forme réduite : (p, n) et Λ ; de même pour les 3 anti-champs de Sakata, d'où $(\bar{p}, \bar{n})$ et $\bar{\Lambda}$. Dans ce modèle, on obtient les premiers mésons par la complète réductibilité de la représentation $(\mathbf{1} + \mathbf{2}) \otimes (\mathbf{1} + \mathbf{2})$ (où $\mathbf{1}$ désigne une représentation de dimension 1, $\mathbf{2}$ celle de dimension 2), et de même pour les baryons et mésons « supérieurs ». Pour avoir l'hamiltonien fort, il exige de plus les conservations de charge et de nombre baryonique. L'inconvénient de ces méthodes, qui utilisent les groupes finis, est d'une part l'absence de définition claire des nombres quantiques et d'autre

part la limitation des dimensions des représentations irréductibles (1 et 2 pour 3 !).

Ce même modèle de Sakata a été expliqué à l'aide d'un groupe continu (*symétrie* U(3) ou SU(3)) comme suit ; on considère les « bases » à 3 composantes $\zeta_\alpha = \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \end{pmatrix}$ et $\zeta^\alpha = (p^*, n^*, \Lambda^*)$, et les représentations propres d'un groupe unitaire en trois dimensions dans l'espace de ces « vecteurs » ; on donne alors par exemple une interprétation de la relation $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$ à l'aide du « scalaire », produit contracté de ζ_α et ζ^α :

$$(\pi^0)'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \zeta_\alpha \zeta^\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} (pp^* + nn^* + \Lambda\Lambda^*),$$

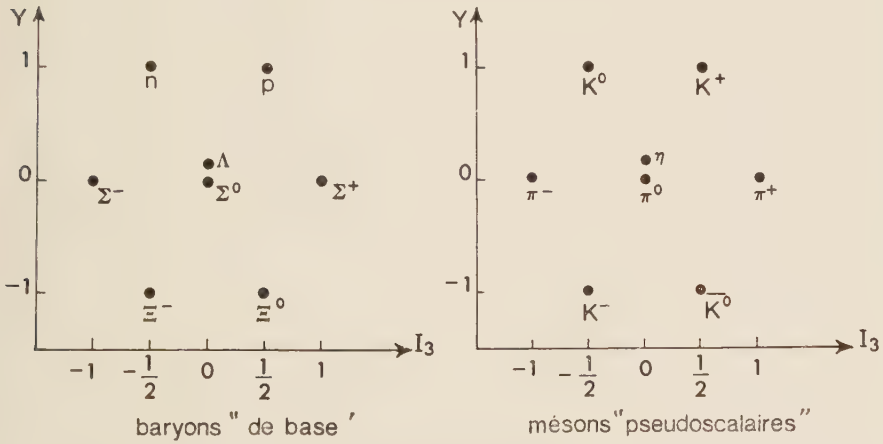
et du « vecteur » (à huit composantes) $M_\alpha^\beta = \zeta_\alpha \zeta^\beta - \frac{1}{3} \delta_\alpha^\beta (\zeta_\gamma \zeta^\gamma)$ d'où la matrice (exprimée à l'aide des bosons habituels, avec $\pi^{0'}$ en plus) :

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \pi^{0'} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{1}{\sqrt{2}} \pi^0 + \frac{1}{\sqrt{6}} \pi^{0'} & K^0 \\ K^- & \overline{K}^0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \pi^{0'} \end{pmatrix}.$$

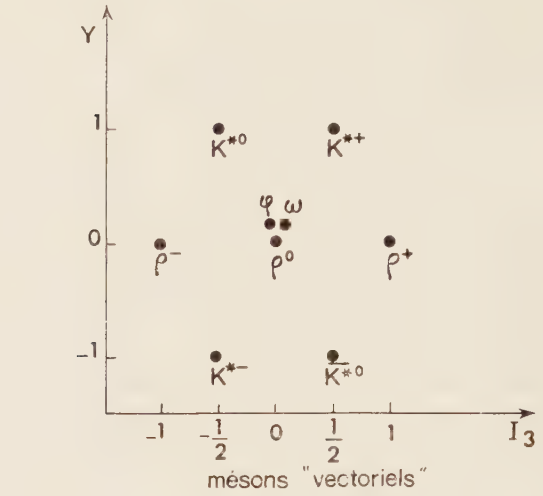
Ce modèle (ou quelques variantes de celui-ci) n'a malheureusement pas été en accord avec l'expérience (même pour ce qui est de la classification) ; néanmoins, le groupe SU(3) (indépendamment du modèle de Sakata), ou plus exactement son groupe adjoint $\frac{\mathrm{SU(3)}}{\mathbf{Z}_3}$, est resté dans sa version « *eightfold way* » (de Ne'eman et Gell-Mann), qui reflète la « symétrie octuple » entre les baryons et les mésons de base.

Gell-Mann et Ne'eman ont voulu donner au même (ou à peu près) outil mathématique une autre interprétation physique. Puisqu'on a trouvé expérimentalement 8 baryons ayant certainement un spin-parité $\frac{1}{2}^+$, et qu'on connaît la représentation adjointe de SU(3), de dimension 8, qui est la première univaluée de $\frac{\mathrm{SU(3)}}{\mathbf{Z}_3}$, et qui correspond aux nombres quantiques de ces 8 baryons, ils ont préféré partir d'un « modèle collectif » en prenant pour baryons de base ces 8 baryons. Il y a plusieurs avantages à cette démarche : on introduit une certaine « démocratie » parmi les particules, c'est-à-dire que l'on n'en considère pas 3 particulières comme étant de base (les seules particules fortes se singularisant vraiment étant p et n, qui sont

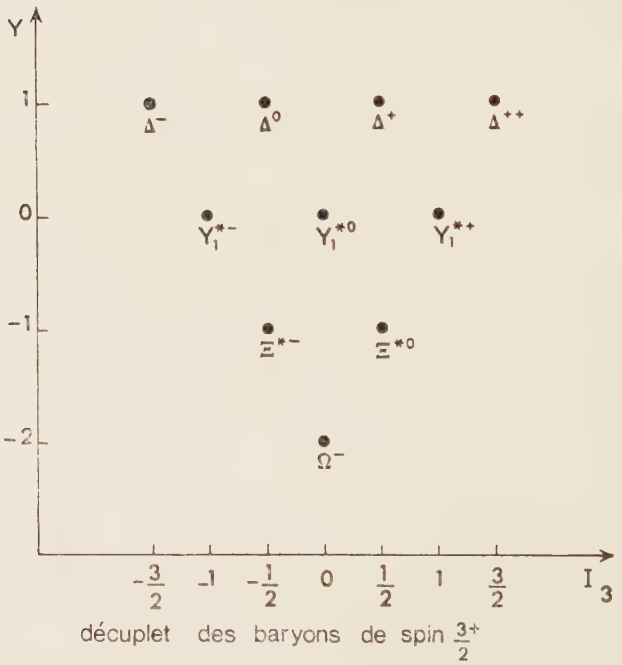
stables) ; on a une « symétrie d'hypercharge » dans l'octet baryonique de base (Y prend les valeurs -1, 0, 1 dans cet octet) ; et de plus on avait un certain parallélisme avec les mésons de spin 0^- (ceux d'entre eux qui sont bien établis pouvant alors être groupés en octet). D'un autre côté, il y a une difficulté, que l'on a pu peut-être escamoter en considérant $\frac{SU(3)}{Z_3}$, mais qui n'en demeure pas moins : à quoi correspond la représentation de dimension 3 ? Car en principe la représentation de base doit correspondre à des particules que l'on considère comme étant dans un certain sens « de base » ; à la représentation de dimension 3, on a pu associer 3 particules hypothétiques, nommées « quarks » ou « as », particules supposées assez lourdes (et dans certaines interprétations de nombre baryonique $B = \frac{1}{3}$) ; mais personne n'a pu jusqu'ici observer de telles particules « lourdes » (avec charge fractionnaire si $B = \frac{1}{3}$). L'essentiel de la classification de SU(3) se résume dans les 4 tableaux suivants (pour les baryons de base, les mésons pseudoscalaires et vectoriels, et le décuplet de baryons de spin $(\frac{3}{2})^+$). La situation expérimentale pour les baryons de spin $\frac{1}{2}^-$, $\frac{3}{2}^-$, $\frac{5}{2}^+$, etc., et les mésons de spin 2^- (etc.) n'est pas encore claire.



Comme on le voit, le centre du diagramme des mésons vectoriels contient 3 particules : ρ^0 (partie centrale du triplet), ω et φ ; on classifie donc en fait 9 particules. On explique ceci en disant qu'une certaine combinaison « linéaire » de ω et φ appartient à la représentation, et qu'une autre est le singulet associé à cet octet (par $\mathbf{3} \otimes \mathbf{3}^* = \mathbf{8} \oplus \mathbf{1}$) : c'est ce qu'on appelle le « $\omega - \varphi$ mixing ». Mais ceci est évidemment artificiel, et imposé par la non-existence d'une représentation irréductible de dimension 9 de SU(3), à laquelle on puisse associer les mésons vectoriels. En outre, on sait aujourd'hui que, pour les mésons pseudoscalaires, de spin 0^-, on a le singulet (η 2 π), qui est donc une « 9e particule » de cet « octet », fait qui n'avait



mésons "vectoriels"



décuplet des baryons de spin $\frac{3^+}{2}$

pas été pris en considération dans la version « eight-fold way » de la théorie de SU(3). Or il est évident que ces deux faits plaident en faveur du groupe SL(3, **C**), qui a des représentations de même dimension que SU(3) (avec une structure assez ressemblante de nombres quantiques) et en plus (entre autres) une représentation irréductible de dimension 9 (comme on le verra

plus loin), laquelle pourra très bien servir à classifier les 9 mésons de chacun des spins 0^- et 1^-.

Gürsey et Radicati ont voulu (phénoménologiquement) introduire le spin (non relativiste, sous la forme d'un groupe SU(2)) dans le formalisme « interne », et ont ainsi considéré le groupe simple SU(6), sorte de « fermeture » de SU(3) $\otimes$ SU(2), et le contenant comme sous-groupe maximal (cf. Dynkin ([14])) ; en tenant compte de tous les états possibles de « polarisation », ils ont alors classifié les mésons (0^- et 1^-) dans la représentation adjointe (de dimension 35) et les baryons ($1/2^+$ et $3/2^+$) dans la représentation de dimension 56, ce qui, dans la situation expérimentale actuelle, est toujours possible. Salam, quant à lui, a introduit le groupe qu'il appelle $\widetilde{SU}_{12}$, et qui est en fait SU(6,6) ; mais ici les dimensions des représentations intéressantes sont si élevées qu'on ne peut pas faire de classification raisonnable.

Un autre modèle, du type de celui de Sakata, est celui de Yukawa. Ce dernier est aussi un « modèle de particules composées », mais à 4 dimensions cette fois. L'avantage « esthétique » de ce choix est d'une part que si l'on donne une signification géométrique dans un espace-temps au groupe interne, il opère sur les « vecteurs » de ce type, et d'autre part qu'il reflète la symétrie entre quatre baryons « de base » et les 4 leptons, pour ce qui est des interactions courant-courant dans l'hamiltonien. Nous choisirons ici pour groupe de symétrie le « bilatère » $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, dont les représentations irréductibles sont $D(m, n) \otimes D(m', n')$ (où $D(m, n)$ dénote la représentation D_{mn} de $\mathbf{L}$) ; les représentations $D(m, n) \otimes D(m, n)$ sont dites celles de la « partie centrale » ; pour ce qui est du groupe $(\mathbf{L} \times \mathbf{L} + P) = BP(\mathbf{L})$ (extension de $\mathbf{Z}_2$ par $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$), on a les représentations de la partie centrale qui se décomposent sur le sous-groupe normal $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ en

$$D(m, n) \otimes D(m, n) \oplus D(n, m) \otimes D(n, m) \text{ (pour } m \neq n).$$

Supposons alors que la représentation de base

$$D(\tfrac{1}{2}, 0) \otimes D(\tfrac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \tfrac{1}{2}) \otimes D(0, \tfrac{1}{2})$$

opère sur le schéma à 4 particules de Yukawa $\zeta'_\alpha = \begin{pmatrix} p \\ n \\ \Lambda \\ V \end{pmatrix}$, le premier $D(\frac{1}{2}, 0)$ opérant sur le demi-spineur $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix}$, le second sur les antiparticules $\begin{pmatrix} \bar{p} \\ \bar{n} \end{pmatrix}$, et le premier $D(0, \frac{1}{2})$ sur le deuxième demi-spineur $\begin{pmatrix} \Lambda \\ V \end{pmatrix}$, le second sur leurs antiparticules ; la « particule » V^+ ici aurait pour nombres quantiques $S = 1$, $B = 1$, $I = 0$ (et pour spin $\frac{1}{2}^+$) : malheureusement, malgré de nombreuses expériences, il n'a pas été possible de déceler une telle *particule* (dont la non existence est liée à l'absence de « symétrie d'hyper-

charge » pour les particules de spin $\frac{3}{2}^+$, car pour V^+ on a $Y = 2$). [On vient toutefois de découvrir une *résonance* semblant avoir ces nombres quantiques]. Nous préférerons alors prendre pour « spineur » de base $\zeta_\alpha = \begin{pmatrix} \Xi^- \\ \Xi^0 \\ \Omega^- \\ \Lambda \end{pmatrix}$, identifiant ainsi $m = I$ et $q = \frac{1}{2}(Y + B)$, ce qui sera parfaitement cohérent si le spin de Ω^- s'avère être $\frac{1}{2}^+$; si au contraire le spin de ce dernier est $\frac{3}{2}^+$, on peut toujours remplacer les 4 particules de ζ_α par des « quarks » et continuer de façon analogue au cas précédent.

Ecrivons alors la classification, pour les premières représentations du modèle $BP(\mathbf{L})$ [Voir tableau page 113].

On fait $m = I$, $p = I_3$ (« poids associé »), $q = \frac{1}{2} S + B$ (« poids associé » à n). Pour les baryons, nous n'avons pas écrit la partie correspondant aux antiparticules (elle se déduit immédiatement) ; pour les mésons, cette partie (le 2e terme du produit direct $D(m, n) \otimes D(m, n)$) redonne les mêmes particules (comme on le voit de suite dans les représentations ci-dessous). A la *suite* de certaines représentations, nous avons écrit le singulet associé au produit de Clebsch de la représentation par elle-même. On a

$$Q = p + q - \frac{B}{2} .$$

3. La symétrie de Bronzan et Low pour les particules fortes, comme conséquence de notre étude des opérations P, C, T dans le « bilatère » $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$.

Cette symétrie est, dans un certain sens, une règle de sélection pour des bosons ; elle peut s'énoncer de la façon suivante (cf. ([24])) : il existe un opérateur A, qui opère diagonalement sur des bosons, avec des valeurs propres ± 1, et tel que :

$$A\pi = -\pi\,,\ AK = -K\,,\ A\eta = -\eta\,,\ A\bar{K}K^* = -\bar{K}K^*,\ A\omega = -\omega\,;$$

$$AB = B\,,\ AF^0 = F^0\,,\ AK^* = K^*\,,\ A\varphi = \varphi\,,\ A\rho = \rho\,,\ \text{et}\ A\gamma = \gamma\,.$$

Nous allons la retrouver théoriquement, à l'aide de notre modèle de classification quadridimensionnel (à la Yukawa) en supposant l'opérateur A défini par les baryons comme l'inversion temporelle interne T (pour le groupe bilatère $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$), et en l'obtenant pour les bosons par un processus de fusion, à savoir le produit tensoriel des représentations. Insistons sur le fait que notre opérateur A, défini comme identique à T pour les baryons de base, puis étendu à tous les baryons et bosons comme nous venons de le voir, jouera le rôle de l'opérateur de passage particule-antiparticule pour les baryons de base. En effet, suivant en cela divers auteurs (cf. ([9]) par exemple) nous considérons que l'on passe d'une fonction d'onde d'une particule à celle d'une antiparticule par une opération PC, c'est-à-dire qu'une antiparticule n'est pas seulement obtenue par changement de signe des nombres quantiques d'une particule (conjugaison totale dans notre

m	p	n	q	Y	S	Q	Représentation	Particule
$\frac{1}{2}$	$1/2$ $-1/2$	0	0 0	-1	-2	0 -1	$D\left(\frac{1}{2}, 0\right)$	Ξ^0 Ξ^-
0	0 0	$\frac{1}{2}$	$1/2$ $-1/2$	0 -2	-1 -3	0 -1	$D\left(0, \frac{1}{2}\right)$	Λ Ω^-
0	0	0	0	0	0	0	singulet	η
1	1 0 -1	0	0 0 0	0 0 0	0	1 0 -1	$D(1, 0)$	π^+ π^0 π^-
0	0	0	0	0	0	0	singulet	F^0
0	0 0 0	1	1 0 -1	2 0 -2	2 0 -2	1 0 -1	$D(0, 1)$	ω^+ ω ω^-
$\frac{1}{2}$	$1/2$ $-1/2$ $1/2$ $-1/2$	$\frac{1}{2}$	$1/2$ $1/2$ $-1/2$ $-1/2$	1 1 -1 -1	1 1 -1 -1	1 0 0 -1	$D\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	K^+ K^0 $\bar{K}^0$ K^-
0	0	0	0	0	0	0	singulet	φ
1	1 0 -1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1 0 -1	$D\left(1, \frac{1}{2}\right)$	Σ^+ Σ^0 Σ^-
	1 0 -1		$-\frac{1}{2}$	-2	-3	0 -1 -2		Y^0 Y^{-*} Y^{--}
$\frac{1}{2}$	$1/2$ $-1/2$	1	1	1	0	1 0	$D\left(\frac{1}{2}, 1\right)$	p n
	$1/2$ $-1/2$		0	-1	-2	0 -1		Ξ^{0*} Ξ^{-*}
	$1/2$ $-1/2$		-1	-3	-4	-1 -2		F^- F^{--}

formalisme interne), mais aussi en en prenant géométriquement « l'image dans un miroir » ; comme $PC = T$ d'après notre définition des opérateurs P, C, T dans le formalisme interne, ceci rejoint l'image de Feynman d'une antiparticule comme une particule « remontant le temps » : un baryon et un antibaryon créent un état bosonique qui est T-invariant. Remarquons en passant que notre opérateur P (interne), défini de la même manière pour les bosons, pourra être considéré comme une généralisation de la

G-parité, à ceci près qu'au lieu d'être défini seulement pour les mésons non étranges (hypercharge $Y = 0$), il le sera pour tous les mésons (rappelons que $Y = B + S$ pour les particules qui ne sont pas des leptons).

Considérons alors la « partie centrale » des représentations irréductibles du groupe $BP(\mathbf{L})$, celles qui (pour $m \neq n$) se décomposent sur $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ en $D(m, n) \otimes D(m, n) \oplus D(n, m) \otimes D(n, m)$ (pour simplifier l'écriture, on a écrit $D(m, n)$ au lieu de D_{mn}). Conformément à notre classification dans le cas du « bilatère » $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$, identifions $p = I_3$ et $q = \frac{1}{2}(Y + B)$ (I : isospin, Y : hypercharge, B : nombre baryonique), la représentation de base $D(\frac{1}{2}, 0) \otimes D(\frac{1}{2}, 0) \oplus D(0, \frac{1}{2}) \otimes D(0, \frac{1}{2})$ opérant sur le schéma de particules « à la Yukawa », composé de 4 baryons, $\zeta_\alpha = \begin{pmatrix} \Xi^- \\ \Xi^0 \\ \Omega^- \\ \Lambda \end{pmatrix}$; les deux cascades et leurs antiparticules appartiennent au premier terme de la « somme directe », Λ et Ω^-, et leurs antiparticules, au second ; les signes de T pour chaque facteur direct (dans chaque terme de la somme directe de la représentation de base) seront opposés, puisque l'un représente les particules et l'autre les antiparticules, que T est notre « opération antiparticule », et que (d'après ce qu'on a vu au premier chapitre) $TD(m, n) = D(m, n)$ (alors que $PD(m, n) = D(n, m)$). Notons en outre que la représentation $D(n, n) \otimes D(n, n)$ de $\mathbf{L} \times \mathbf{L}$ se prolonge en une représentation (irréductible) du même ordre de $BP(\mathbf{L})$.

Nous sommes alors en mesure de déduire la symétrie de Bronzan-Low des remarques que nous venons de faire (ainsi que de la classification).

La famille des mésons π appartient à la partie $D(1, 0) \otimes D(1, 0)$ de la représentation $D(1, 0) \otimes D(1, 0) \oplus D(0, 1) \otimes D(0, 1)$ et sera construite comme une résonance cascade-anticascade ; les signes de T étant opposés pour Ξ et $\overline{\Xi}$, on aura $A\pi = -\pi$.

La famille $K(K^+, K^0, K^-, \overline{K}^0)$ appartient à la représentation (irréductible) $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \otimes D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ de $BP(\mathbf{L})$, et sera dans notre système construite comme résonances $\Xi\overline{\Lambda}$ et $\Xi\overline{\Omega}$; les signes de T étant les mêmes pour Ξ, Λ, Ω (et opposés pour leurs antiparticules) on a $AK = -K$.

La résonance η (à 540 meV) sera un singulet associé au triplet $\frac{1}{2}(Y + B)$, c'est-à-dire avec le second « facteur direct » de

$$D(1, 0) \otimes D(1, 0) \oplus D(1, 0) \otimes D(0, 1),$$

et sera construit comme une résonance $\Lambda\overline{\Lambda}$; par conséquent, $A\eta = -\eta$.

La résonance ω (à 780 MeV) sera la partie neutre du dernier triplet $\frac{1}{2}(Y + B)$, et sera construite comme une résonance $\Omega^- \overline{\Omega}^-$; il en résulte, de même qu'avant, que $A\omega = -\omega$.

Le K^* de 890 MeV sera construit comme une résonance de quatre fermions, soit comme une résonance $\pi - K$; comme on a vu que

$A\pi = -\pi$, $AK = -K$, il en résulte (d'après la propriété multiplicative de A) que $AK^* = K^*$.

Pour ce qui est de la résonance $\bar{K}K^*$ à 1 410 MeV, elle sera donc construite comme système de six fermions ; comme $A\bar{K} = -\bar{K}$, $AK^* = K^*$, on aura $A\bar{K}K^* = -\bar{K}K^*$.

Le boson B à 1 220 MeV sera dans notre système une résonance de quatre fermions, ou plus exactement une résonance $\pi - \omega$. Comme $A\pi = -\pi$ et $A\omega = -\omega$, on aura $AB = B$.

Pour ce qui est du singulet F^0 à 1 256 MeV, et du triplet ρ à 755 MeV, on les construit comme des résonances $\pi - \pi$ (à quatre fermions, par conséquent) et on a donc $AF^0 = F^0$, $A\rho = \rho$.

Le méson φ à 1 020 MeV sera construit comme une résonance $K^0 - \bar{K}^0$, et (comme $AK = -K$) on aura donc $A\varphi = \varphi$.

En ce qui concerne le photon, qui n'a pas été construit dans notre schéma, on posera $A\gamma = \gamma$ par définition.

Notons enfin que l'on peut déduire des règles de sélection pour d'autres bosons (comme par exemple les résonances de Miller) exactement de la même façon que celle que l'on vient d'employer.

Remarque. Le traitement que nous venons de faire est susceptible de généralisation à une classe importante de groupes. Il faudra pour cela que les représentations de classification de ce groupe (interne) s'obtiennent par processus de fusion à partir d'une représentation de base, que l'on ait une « bonne définition » de P dans ce groupe (cf. premier chapitre), et que dans le « bilatère » de ce groupe (bilatère : à cause des antiparticules) on ait une « bonne définition » de l'opération $T = PC$ (dans laquelle on puisse retrouver une analogue de l'image de Feynman).

4. Application de l'étude par des extensions U(1) par SU(2). On a vu que $U(2) \approx U(1)$. SU(2), produit semi-direct, que

$$U(2) \approx \frac{SU(2) \times U(1)}{\mathbf{Z}_2} \approx \frac{U(2) * \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2}$$

(où $U(2) * \mathbf{Z}_2$ désigne une extension non triviale de U(2) par $\mathbf{Z}_2$), et que l'on pouvait obtenir une expression du produit semi-direct en écrivant tout $u \in U(2)$ sous la forme d'un couple :

$$u = ((-1)^{[\omega/2\pi]}\, u \otimes e^{-i\omega/2}\,,\, e^{i\omega})\,,$$

où $\det u = e^{i\omega}$, la loi du produit étant obtenue à l'aide du cocyle $(-1)^{\varepsilon(\omega_1,\omega_2)}$ avec

$$\varepsilon(\omega_1, \omega_2) \equiv \left[\frac{\omega_1}{2\pi}\right] + \left[\frac{\omega_2}{2\pi}\right] - \left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2\pi}\right] \quad \text{(modulo 2).}$$

Or on remarque que U(2), comme SU(2), possède le sous-groupe normal $\mathbf{Z}_2 = \pm I$ (I : identité d'ordre 2), et que dét u = dét $(-u)$ pour $u \in$ U(2). Considérons donc les éléments $(\pm u)$ du groupe quotient $\frac{\mathrm{U}(2)}{\mathbf{Z}_2}$, et posons dét $(\pm u) = e^{i\omega}$. L'expression de u sous forme d'un couple nous permet d'obtenir l'expression de $(\pm u)$ sous la forme du couple :

$$(\pm u) = (\pm u \otimes e^{-i\omega/2}, e^{i\omega})$$

et on voit que le premier terme, $\pm u \otimes e^{-i\omega/2}$, appartient au groupe quotient $\mathrm{SU}(2)/\mathbf{Z}_2$, qui est isomorphe à SO(3). De plus, la loi de produit des couples nous donne, pour $\mathrm{U}(2)/\mathbf{Z}_2$:

$$(\pm u_1)(\pm u_2) = (\pm u_1 u_2 \otimes e^{-i(\omega_1+\omega_2)/2}, e^{i(\omega_1+\omega_2)}),$$

puisqu'ici on n'a plus à se préoccuper du cocycle $(-1)^{\varepsilon}$. Ainsi, on aura

$$\frac{\mathrm{U}(2)}{\mathbf{Z}_2} \approx \frac{\mathrm{SU}(2)}{\mathbf{Z}_2} \times \mathrm{U}(1) \approx \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{U}(1)$$

[produit direct, qui est d'ailleurs la seule extension centrale de U(1) par SO(3), ce dernier n'ayant pas de centre, donc la seule extension topologique — i. e. telle que les flèches considérées soient des morphismes de groupes topologiques —, puisque Aut (SU(2)) $\approx$ SO(3) $\approx$ Aut (SO(3)), tout automorphisme de SU(2) induisant sur le centre $\mathbf{Z}_2$ l'automorphisme trivial — le seul, dans le cas de $\mathbf{Z}_2$ —].

On a dans SU(2) le sous-groupe normal $\mathbf{Z}_2 = \{ \pm I \}$, et dans U(1) le sous-groupe (normal évidemment, car U(1) est abélien) $\mathbf{Z}_2 = \{ \pm 1 \}$. En formant le produit semi-direct U(2), on « superpose » en quelque sorte les deux $\mathbf{Z}_2$, en ce sens que dans le produit direct on identifie les couples $(-I, -1)$ et $(I, 1)$, qui tous deux donneront l'élément I de U(2), et les couples $(I, -1)$ et $(-I, 1)$, qui tous deux donneront l'élément $-I$ de U(2). Si au contraire on identifiait les éléments $\pm I$ de SU(2), on obtiendrait le groupe $\frac{\mathrm{U}(2)}{\mathbf{Z}_2} \approx \mathrm{SO}(3) \times \mathrm{U}(1)$. Ainsi, bien que $\frac{\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2}{\mathbf{Z}_2} \approx \mathbf{Z}_2$ et qu'ici le résultat soit le même si on divise le premier facteur par $\mathbf{Z}_2$ (ou le second) ou si on divise la totalité, on a des résultats différents pour

$$\frac{\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)}{\mathbf{Z}_2} \approx \mathrm{U}(2) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{SU}(2)}{\mathbf{Z}_2} \times \mathrm{U}(1) \approx \frac{\mathrm{U}(2)}{\mathbf{Z}_2},$$

et encore pour

$$\mathrm{SU}(2) \times \frac{\mathrm{U}(1)}{\mathbf{Z}_2} \approx \mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1) \approx \mathrm{U}(1) *_{\mathbf{Z}_2}.$$

Le fait que U(2) soit produit semi-direct de U(1) par SU(2) équivaut donc à une relation entre les deux $\mathbf{Z}_2$, celui de SU(2) ($\pm I$) et celui de U(1) (± 1), relation qui est une sorte de « superposition » de ces $\mathbf{Z}_2$, au sens défini plus haut.

Identifions alors le $\mathbf{Z}_2$ de SU(2) avec $\{(-1)^{2t} I\}$ ($= \{(-1)^{2t_3} I\}$) où I est la matrice identité, t l'isospin (dont le groupe correspondant est le SU(2) considéré), et t_3 sa 3e composante ; on pourrait d'ailleurs aussi bien l'identifier avec $\{(-1)^{2t+1} I\}$ [et seule la comparaison avec les résultats expérimentaux est susceptible de départager ces deux possibilités, qui s'excluent mutuellement]. En supposant maintenant que U(1) représente *l'hypercharge* Y, on peut identifier le $\mathbf{Z}_2$ du U(1) considéré plus haut avec $\{(-1)^Y\}$ — ou encore avec l'opposé, de même que pour t. Avec ces identifications, le lien entre les $\mathbf{Z}_2$ de U(1) et de SU(2) obtenu dans le produit semi-direct (dû à l'identification de $(I, 1)$ et de $(-I, 1)$) donnera, en supposant que l'on ait un groupe « interne » contenant un U(2) dont le SU(2) représente l'isospin, et la jauge U(1) l'hypercharge, la relation $(-1)^{2t} = (-1)^Y$ — ou la relation inverse, $(-1)^{2t} = (-1)^{Y+1}$, suivant l'identification faite, les deux relations s'excluant mutuellement. La comparaison avec l'expérience (il suffit de la faire pour une particule, par exemple le proton) nous montre alors la relation que l'on obtient est $(-1)^{2I} = (-1)^Y$, en notant ici I *l'isospin*. En notant I_3 la 3e composante de l'isospin I, on aura donc $(-1)^{2I_3} = (-1)^{2I} = (-1)^Y$, d'où $(-1)^{2I_3+Y} = 1 = (-1)^{2k}$, où $k \in \mathbf{Z}$ est un nombre entier, soit $2I_3 + Y = 2k$ (k entier), ou encore $k = I_3 + \frac{Y}{2}$. Si alors on identifie ce nombre entier avec la charge Q, on retombe sur la formule de Gell-Mann-Nishijima, $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$. On peut écrire ceci $(-1)^Q = (-1)^{I_3+Y/2}$: tout se passe ainsi comme si le $\mathbf{Z}_2$ de U(2) — que l'on peut alors identifier avec $(-1)^Q$, où Q est la charge — provenait « en parties égales » de celui de SU(2) et de celui de U(1) (l'élément neutre correspondant aux particules neutres, $Q = 0$). Ceci est évidemment très intuitif, car ni I_3 ni $Y/2$ ne sont toujours entiers, et donc ils ne peuvent pas être considérés, rigoureusement parlant, comme définissant un groupe $\mathbf{Z}_2$ si on les prend isolément.

Comme on l'a vu, toute autre façon d'étendre U(1) par SU(2) ou par SO(3) ne permet pas d'obtenir entre les $\mathbf{Z}_2$ correspondants (s'il y en a) le lien obtenu dans le cas du produit semi-direct. La seule façon, compatible avec les résultats expérimentaux, de combiner isospin et hypercharge est ainsi de les considérer comme décrits dans le produit semi-direct $U(2) = U(1).SU(2)$. En outre, dans le cas des algèbres de Lie, la seule extension possible est le produit direct $\mathfrak{u}(2) = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{su}(2)$: ceci correspond bien au fait que, dans le cas des groupes, les seules relations obtenues sont des relations de phase, dues à la présence d'un centre discret dans SU(2).

B) LIEN ENTRE LES FORMALISMES EXTERNE ET INTERNE. FORMULE DE MASSE ET PRINCIPE DE CLASSIFICATION.

1. Récemment plusieurs auteurs ont examiné la possibilité d'interpréter l'espace du spin isotopique comme reflétant des « mouvements internes réels » en espace de Minkowski (cf. ([3])). D'après le traitement du formalisme externe, on sait que les mouvements externes des particules élémentaires sont invariants sous le recouvrement universel $\widetilde{\mathbf{P}}$ du groupe de Poincaré $\mathbf{P}$ (on considère $\widetilde{\mathbf{P}}$ pour avoir des spins demi-entiers). Il se pose alors naturellement la question de savoir quel peut être le lien entre l'iso-espace et l'espace de Minkowski ; $\widetilde{\mathbf{P}}$ et le groupe de symétrie interne $\mathbf{X}$ sont-ils indépendants, ou au contraire existe-t-il un certain lien entre eux ? En termes physiques, la question qui se pose est celle de trouver des relations entre le spin externe J et le carré de la masse physique $-g^{\mu\nu}\,p_\mu\,p_\nu$ d'une part, et des nombres quantiques internes (comme I, I_3, Y) de l'autre. Mathématiquement, on peut formuler ainsi le problème : étant donnés (pour simplifier) un groupe interne semi-simple $\mathbf{X}$, et le groupe de Poincaré $\mathbf{P}$, trouver un groupe qui les « contienne » tous deux et les relie d'une façon non triviale (au sens où nous l'avons expliqué dans le second chapitre).

Une possibilité de traiter ce problème est de faire appel à la théorie des extensions des groupes. Michel ([22]) ([31]) a étudié du point de vue algébrique les extensions centrales de $\mathbf{P}$ et $\widetilde{\mathbf{P}}$ par un groupe (de jauge) abélien, ou par un groupe interne. Les seuls résultats non négatifs qu'il a obtenu sont des relations de phase du type $(-1)^{B+L} = (-1)^{2J}$ (L : nombre leptonique), obtenue en considérant les extensions centrales de $\mathbf{P}$ par un groupe de jauge abélien (pour $\widetilde{\mathbf{P}}$, elles sont essentiellement triviales : cf. ([22])) — relation analogue à celle que nous avons obtenue, par des considérations de type semblable, à la fin de la première partie de ce chapitre.

D'autres auteurs ([20]) ([23]), comme nous l'avons vu au second chapitre, ont également obtenu des résultats négatifs, dans le cas des algèbres de Lie, auquel cas (nous l'avons vu) les extensions sont triviales ($\mathfrak{X}$ semi-simple). D'après ces résultats, il semblerait que les mouvements externe et interne soient indépendants. Mais ce que nous avons vu au second chapitre, et les remarques qui vont suivre, nous montrent qu'il est fort probable que ces mouvements ne sont pas indépendants.

a) Si on considère les particules dans la classification de SU(3) (par exemple), on constate qu'à tout supermultiplet (ensemble de particules classifiées dans une même représentation) on assigne un certain spin-parité J^P. Physiquement, cela se justifie par le fait que c'est en accord avec l'expérience ; mais il n'existe aucune raison mathématique à ce fait, dans le cas de SU(3),

car on a vu que toute unification de $\mathscr{P}$ et su(3) est triviale, $\mathscr{P} \oplus$ su(3), c'est-à-dire que l'on peut attribuer n'importe quel spin à n'importe quelle représentation de classification, et qu'en particulier il n'existe aucune raison (de théorie des groupes) pour que des particules de spin $\frac{3}{2}^+$ ne forment pas un octet (!).

Si on considère les particules du point de vue phénoménologique, on constate que la suite J^P, I, I_3, Y (et peut-être l) de nombres quantiques définit au plus un baryon. Ceci suggère qu'il doit exister un lien étroit entre les statistiques externe et interne, c'est-à-dire qu'à cause de cela également, il doit exister un lien entre les mouvements externe et interne : le baryon, fermion par rapport à la statistique externe, est aussi sans doute encore un fermion pour le formalisme dit interne ; on doit donc avoir, dans la statistique interne aussi, une sorte de *principe d'exclusion pour baryons.*

b) La formule de masse de Gell-Mann-Okubo, ou toutes les formules semblables obtenues dans les groupes compacts, est purement phénoménologique. Ce formalisme n'explique pas le lien entre $-g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu = m^2$ (le carré de la masse physique en relativité restreinte) et l'éclatage fort de masse. En effet, si le lien entre $\mathscr{P}$ et l'algèbre interne $\mathfrak{X}$ est la somme directe $\mathscr{P} \oplus \mathfrak{X}$, comme c'est le cas pour $\mathfrak{X}$ compacte semi-simple (ou même sous des hypothèses moins restrictives, comme on l'a vu au chapitre II), il y a incompatibilité entre la notion de masse dans le formalisme externe et les formules donnant l'éclatage fort de masse de type Gell-Mann-Okubo ; car alors m^2 commute avec tout élément de $\mathfrak{X}$, et par conséquent toutes les particules classifiées dans une même représentation de $\mathfrak{X}$ devraient avoir même masse : les représentations qui avaient pour but de nous donner un « spectre de masse » nous donnent un spectre *dégénéré.*

D'autre part, la méthode utilisée contient un processus mystérieux de cassage de symétrie, dont la signification est que « ça marche ». Etudions par exemple le cas de SU(3) avec une technique de moment angulaire (en le considérant comme trois SU(2) couplés, qui donnent naissance aux I, U, et V spins de Lipkin — seuls I et U donnant des conséquences physiques). Dans cette interprétation, les interactions « très fortes » (inobservables pour le moment) sont scalaires sous les I et U spins. Les interactions observées, dites « moyennement fortes », sont évidemment scalaires par rapport à l'isospin I, mais sont de type $S + V$ (scalaire + vecteur) par rapport au U-spin, c'est-à-dire qu'on a un terme scalaire plus une « perturbation V » proportionnelle à la 3^e composante U_3 du U-spin ; on peut ainsi obtenir la formule forte d'Okubo (encore qu'il soit difficile de considérer des différences de masse qui sont parfois de l'ordre d'une centaine de MeV comme des perturbations). Plus généralement, ce que l'on fait dans les travaux de ce type revient à considérer la masse comme un opérateur tensoriel (on peut évidemment, si c'est plus commode, considérer ainsi toute fonction de la masse) et à utiliser ensuite le théorème de Wigner-Eckart.

Peut-être faut-il insister ici sur le fait que, pour nous, l'utilisation de ce théorème est claire et bien justifiée pour les problèmes concernant les moments angulaires et magnétiques des particules, alors que dans le cas d'un opérateur comme la masse, le considérer comme opérateur de Wigner-Eckart, et qui plus est d'une nature tensorielle bien précise, est une « hypothèse ad-hoc » et sans justification théorique.

De tout ce qu'on a expliqué plus haut, notre façon de considérer la masse découle aisément. Comme on a réussi à trouver un lien non trivial (sous la forme d'une unification $\mathfrak{U}$) entre $\mathscr{P}$ et $\mathfrak{X}$ (pour des $\mathfrak{X}$ convenables), $-g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$ ne sera pas en général un invariant de $\mathfrak{U}$, et il faudra le corriger pour avoir un invariant. Ici donc, $-g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$ + un terme correctif (qui dans les bons cas sera une fonction convenable des nombres quantiques internes, comme par exemple I, I_3, Y) sera constant dans toute représentation de dimension finie de $\mathfrak{U}$, constante qui servira à caractériser les représentations de $\mathfrak{U}$, et par conséquent celles de $\mathfrak{X}$ aussi (par rapport auxquelles on classifie) ; le terme correctif donnera l'éclatage de masse dans le supermultiplet (et on peut considérer la constante ci-dessus comme la masse d'un singulet parfois hypothétique, lié au supermultiplet) ; plus généralement, on pourrait d'ailleurs considérer un invariant qui s'exprime sous la forme d'une certaine fonction de $-g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu$ et d'autres termes. On n'a donc pas ici de mystère de symétrie brisée : le concept de masse est un concept géométrique, attaché eu lien entre les formalismes externe et interne.

Cette interprétation de la masse soulève cependant des difficultés, liées assentiellement au fait que les p_μ sont nilpotents dans les représentations finies de $\mathscr{P}$, et le seront aussi pour $\mathfrak{U}$: on ne pourra donc espérer avoir un véritable spectre de masse (en passant aux valeurs propres) que dans certaines représentations (unitaires) infinies de l'unification (et pour certaines unifications), car il nous faudra avoir des valeurs propres discrètes pour l'invariant et pour la correction. Comme malgré tout on peut ainsi obtenir une formule bien vérifiée expérimentalement, on propose d'introduire un *principe de classification* : on *classe* les particules à l'aide de *représentations finies* du groupe fort (comme un état invariant sous les transformations de la représentation), et pour chacune d'elles on donnera formellement un sens à la formule de masse, sous la forme de *relations entre les masses* des diverses particules lui appartenant. On peut aussi, bien sûr, classifier les particules à l'aide de représentations infinies (unitaires) convenables.

Il est alors possible que le succès partiel des groupes unitaires (du point de vue phénoménologique) s'explique par le fait que les résultats qu'on en déduit constituent une bonne approximation de ceux que l'on obtiendrait à l'aide de représentations unitaires infinies du « bon » groupe (non compact), et que la symétrie qu'ils reflètent est une symétrie d'états et non d'hamiltonien : par analogie avec la spectroscopie atomique (non relativiste), où l'état de moment orbital L est invariant sous SU(2(2 L + 1)), alors que

l'hamiltonien n'est invariant que sous SO(3) (qui seul a une signification géométrique), en « spectroscopie » des particules, où l'on mesure aujourd'hui des états d'énergie de plus en plus grande, on retrouve les résultats expérimentaux en se servant (phénoménologiquement) de groupes unitaires de dimension de plus en plus grande — alors que, eu égard à ce que nous avons vu, la symétrie dynamique des interactions fortes est très probablement du genre espace-temps.

Il n'est enfin peut-être pas inutile d'insister sur le fait que les nombres quantiques internes, à l'aide desquels on veut exprimer le « spectre de masse », ont été introduits phénoménologiquement (comme on l'a vu en A), par généralisation de ce qui était connu ; par exemple, on a introduit l'isospin de façon tout à fait analogue au spin, et l'hypercharge par la formule de Gell-Mann-Nishijima, qui généralise la formule de la charge des nucléons (et n'est peut-être pas la meilleure généralisation). Et si l'on sait (d'après les résultats de Pais) que les seules quantités (non discrètes) conservées exactement sont celles déjà introduites, cela n'implique pas que la masse soit fonction de ces seules quantités : il se peut très bien (par exemple) que la formule de masse fasse intervenir des quantités non conservées dans les interactions fortes observées aujourd'hui (c'est-à-dire qui ne soient pas de « bons nombres quantiques ») ; peut-être existe-t-il d'autres nombres quantiques, auxquels on ne pense pas car ils ne sont pas conservés par les interactions fortes (et que jusqu'ici on a étudié les nombres quantiques surtout du point de vue des lois de conservation), à l'aide desquels la classification ou la formule de masse (par exemple) s'obtiennent de façon très simple.

2. Application de l'étude générale des unifications. Tout d'abord, il résulte du théorème I que, hormis les deux unifications « exceptionnelles » avec $\mathfrak{su}(2, 1)$ et $\mathfrak{g}_{2,2}$, on ne peut espérer avoir $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ non triviale et non banale qu'avec 38 autres algèbres $\mathfrak{X}$ simples (ce qui ne veut pas dire qu'avec toutes celles-ci il existe de telles unifications — il est très vraisemblable que ce n'est pas le cas —), qui toutes contiennent £. Ce sont :

$$\pounds = \mathfrak{so}(3, 1) = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) = \mathfrak{sp}(1, \mathbf{C}) = \mathfrak{so}(3, \mathbf{C}) ;$$

$$\mathfrak{so}(3, 2) = \mathfrak{sp}(2, \mathbf{R}) \text{ et } \mathfrak{so}(4, 1) = \mathfrak{sp}(1, 1) ;$$

$$\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R}) = \mathfrak{so}(3, 3),\ \mathfrak{su}^*(4) = \mathfrak{so}(5, 1),$$

$$\mathfrak{su}(2, 2) = \mathfrak{so}(4, 2) \text{ et } \mathfrak{su}(3, 1) = \mathfrak{so}^*(6) ;$$

$\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$; $\mathfrak{so}(5, \mathbf{C}) = \mathfrak{sp}(2, \mathbf{C})$; $\mathfrak{so}(p, q)$ avec $1 \leqslant q \leqslant p \leqslant p + q \leqslant 10$;

$\mathfrak{sp}(n, \mathbf{R})$ avec $3 \leqslant n \leqslant 5$; $\mathfrak{su}(3, 2)$ et $\mathfrak{su}(4, 1)$; $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ avec $5 \leqslant n \leqslant 10$,

et enfin $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ avec $n = 4, 5$.

En dehors de ces 40 algèbres, toute unification est nécessairement triviale ou banale. D'ailleurs, parmi ces 40 algèbres, il y en a un bon nombre ayant aussi des unifications banales (toutes celles contenant $\mathfrak{su}(2, 2)$ ou $\mathfrak{sl}(5, \mathbf{R})$ par exemple).

Pour ce qui est de £, nous avons déjà construit deux types d'unifications, tous deux de la forme $£.\mathscr{R}_0$, produit semi-direct de £ par un idéal (commutatif). Nous allons voir que toute unification non triviale est de ce type. En effet, toute $U(\mathscr{P}, £)$ est nécessairement des types (UII), soit $£.\mathscr{R}_0$ avec $\mathscr{R}_0 \supset \mathscr{P}_0$, ou (UIII), soit $\mathfrak{U}$ simple $\supset \approx \mathscr{P}$. La seule possibilité pour avoir le type (UIII) est ici $\mathscr{S} = \mathfrak{so}(4, 2)$, mais sa structure (cf. appendice au chapitre II) ne permet pas de la considérer comme $U(\mathscr{P}, £)$ — avec intersection de dimension 1, nécessairement. Il ne reste donc que le type (UII), et d'ailleurs on voit immédiatement dans ce cas que les 2 types réels de $\mathfrak{b}_2$ contenant £ (il n'y en a pas de $\mathfrak{a}_2$ ni de $\mathfrak{g}_2$ dans ce cas) n'ont de représentation réelle contenant D_N sur £ qu'en dimension 5 (et d'ailleurs, seul $\mathfrak{sp}(2, \mathbf{R})$ a une représentation réelle en dimension 4), représentation réductible sur £ en $D_N \oplus O$ (O : représentation triviale en dimension 1), ce qui fait que ces algèbres « inhomogènes » sont des $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$ avec intersection sur £, pour $\mathfrak{X}$ de type $\mathfrak{b}_2$. Comme les seules représentations réelles non triviales de £, irréductibles par des transformations réelles, sont de dimension 4 ou 6 (ou plus élevée), et comme la représentation $£ \to \text{Dér}\,(\mathscr{R}_0)$ définissant le produit semi-direct doit être $D_N \oplus$ (autre chose), pour retrouver $\mathscr{P}$ avec le $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{R}_0$, on devra prendre $\mathscr{R}_0$ commutatif de dimension 8 ou 10 [si l'on prend $\mathscr{R}_0$ résoluble non abélien, la représentation est réductible — on peut le voir directement en cherchant *a priori* ses relations de commutation, comme nous le ferons plus loin pour $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$, ou par un raisonnement abstrait —]. Les deux types d'unification considérés plus haut sont donc les seuls. En outre, $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ commute avec £ et $\mathscr{P}_0$, mais aussi avec tout $\mathscr{R}_0$ car ce dernier est commutatif, donc est un invariant global. Ainsi, si l'on prend $\mathfrak{X} = £$, on a $[m^2, \mathfrak{X}] = 0$, donc pas de spectre de masse, dans l'optique où nous avons abordé ce problème. On aura le même résultat avec $£ \oplus £ = \mathfrak{X}$, toujours en faisant $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$. Si l'on veut donc avoir un spectre de masse, on devra donc se tourner soit vers $\mathfrak{X}$ contenant strictement £ (et pas en facteur direct) — et on a vu que par exemple pour $\mathfrak{X} = \mathfrak{so}(4, 1)$, on a $[m^2, \mathfrak{X}] \neq 0$ ($m^2 = -g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$) — soit vers une unification « exceptionnelle » avec $\mathfrak{X} = \mathfrak{su}(2, 1)$ ou $\mathfrak{g}_{2,2}$. Nous allons maintenant examiner plus en détail le cas des unifications de $\mathscr{P}$ avec une sous-algèbre de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{C})$ (nous considérons les sous-algèbres de cette dernière à cause des résultats du chapitre I, 9), contenant strictement £ (à cause de ce qu'on a vu au 1^er^ chapitre, et ici, comme conséquence du 2^e^ chapitre), à savoir $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C}) \approx \mathfrak{su}(3) \otimes \mathbf{C}$, dont la sous-algèbre compacte maximale est $\mathfrak{su}(3)$, et qui est la « complexifiée » de cette dernière (ce qui permettra d'utiliser, pour l'essentiel, la classification de $\mathfrak{su}(3)$ — qui, jusqu'à présent, semble assez bien vérifiée par l'expérience).

3. Recherche des unifications $U(\mathscr{P}, \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C}), \mathfrak{u}(1))$ et $U(\mathscr{P}, \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C}))$. Cherchons quelles peuvent être les unifications $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ et $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$, pour $\mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$. Soit $\mathfrak{U}$ une telle unification, et écrivons $\mathfrak{U} = \mathscr{R}.\mathscr{R}_0$, où $\mathscr{R}$ est une sous-algèbre de Levi et $\mathscr{R}_0$ le radical. Si $\mathscr{R}$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$, on devra avoir $\mathscr{R}$ de type $\mathfrak{a}_5$ ou $\mathfrak{a}_3 \otimes \mathbf{C}$ au moins, puisque (cf. ([14])) les autres algèbres complexes simples ou semi-simples de dimension inférieure ne contiennent pas l'algèbre $\mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_2$ (et l'on sait que $\mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ est de ce dernier type). Or leur dimension est supérieure à 27, et par conséquent toute $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$ ou $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$ est, dans notre cas, isomorphe à un produit semi-direct $\mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$, ce produit semi-direct redonnant $\mathscr{P}$ avec un $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{X}$ et une sous-algèbre commutative $\mathscr{P}_0 \subset \mathscr{R}_0$; $\mathscr{R}_0$ est ici au plus de dimension 10 (ou 11 si on ajoute un $\mathfrak{u}(1)$). Il nous faut donc rechercher les représentations de dimension au plus 10 (ou 11) de $\mathfrak{X}$, se décomposant sur une sous-algèbre de $\mathfrak{X}$ isomorphe à $\mathfrak{L}$ en $D_N \oplus$ (autre chose). Eu égard aux dimensions des représentations réelles de $\mathfrak{L}$ de dimension $\leqslant 7$, on devra alors avoir $\mathscr{R}_0$ de dimension 8, 9, 10 [les dimensions $5 = 4 + 1$, et $11 = 10 + 1$, envisageables *a priori*, en prenant alors $D_N \oplus O$ ou $D_N \oplus$ (représentation en dimension 6) $\oplus O$, s'éliminent en considérant les dimensions des représentations de $\mathfrak{X}$, et, pour ce qui est de la dimension 11, si l'on ne veut pas $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1)) = U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}) \oplus \mathfrak{u}(1)$, car alors il est superflu d'ajouter un $\mathfrak{u}(1)$].

Le problème est donc ramené d'abord à la recherche d'une représentation réelle de $\mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$, décomposable sur un $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X}$ en $D_N \oplus$ (autre chose), représentation de dimension 8, 9, 10 [la représentation de dimension 6 de $\mathfrak{X}$, obtenue à partir de celle de dimension 3 en doublant la dimension, en faisant $\otimes I_2$ pour $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$ et $\otimes J_2$ pour $J\mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$, ou encore $I_2 \otimes$ et $J_2 \otimes$, où $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ne contient pas D_N]. Il faudra après encore prouver que l'on obtient bien ainsi une unification ; cependant, dans certains cas, on pourra se servir des résultats obtenus pour $U(\mathscr{P}, \mathfrak{L})$ pour montrer (presque) sans calcul que l'on a bien une unification : ce sera le cas si la représentation qui « complète » D_N (sur le $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{X}$ donnant $\mathscr{P}$) est la représentation notée D_4, ou une représentation analogue à celle-ci (c'est-à-dire pour laquelle le calcul de l'intersection est immédiat). Auparavant, étudions la structure de $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$: table III.

Nous avons établi cette table à partir de celle de $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{R})$, elle-même obtenue sur la table de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$ (ou calculée directement à l'aide des relations de commutation canoniques de la base canonique des algèbres $\mathfrak{gl}$), par complexification. Les a_k, b_k, b'_k, b''_k, c_k, c'_k (où l'on pose $-c'_2 = c'_1 + c'_3$, $-c_2 = c_1 + c_3$) correspondent à la représentation de base suivante (ce ne sont pas les mêmes qu'aux tables I et II, pour $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$ et pour $\mathfrak{su}(2, 2)$) [voir page 125].

On aura une sous-algèbre $\mathfrak{su}(2, 1)$ avec les générateurs :

$$(a_3, b''_3, c'_3, 2c'_1 + c'_3 ; b_1, b_2, b'_1, b'_2)$$

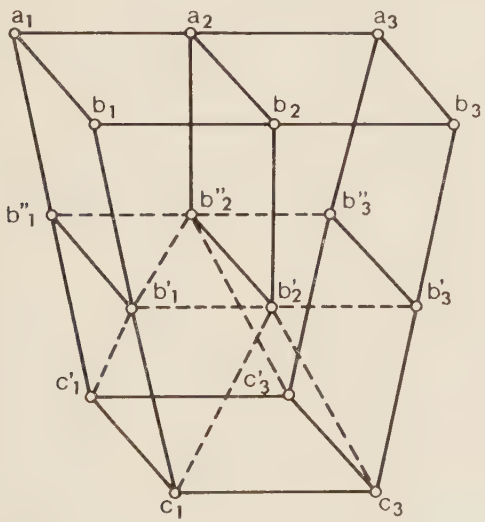
TABLE III. $\mathfrak{sI}(3, \mathbf{C})$.

[\ ]	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	b'_1	b'_2	b'_3	b''_1	b''_2	b''_3	c_1	c_3	c'_1	c'_3	[\ ]
a_1	0	a_3	$-a_2$	0	b_3	$-b_2$	$-2c_1$	$-b'_3$	b'_2	$-2c'_1$	$-b''_3$	b''_2	$2b'_1$	$-b'_1$	$2b''_1$	$-b''_1$	a_1
a_2	$-a_3$	0	a_1	$-b_3$	0	b_1	b'_3	$2(c_1+c_3)$	$-b'_1$	b''_3	$2(c'_1+c'_3)$	$-b''_1$	$-b'_2$	$-b'_2$	$-b''_2$	$-b''_2$	a_2
a_3	a_2	$-a_1$	0	b_2	$-b_1$	0	$-b'_2$	b'_1	$-2c_3$	$-b''_2$	b''_1	$-2c'_3$	$-b'_3$	$2b'_3$	$-b''_3$	$2b''_3$	a_3
b_1	0	b_3	$-b_2$	0	$-a_3$	a_2	$-2c'_1$	$-b''_3$	b''_2	$2c_1$	b'_3	$-b'_2$	$2b''_1$	$-b''_1$	$-2b'_1$	b'_1	b_1
b_2	$-b_3$	0	b_1	a_3	0	$-a_1$	b''_3	$2(c'_1+c'_3)$	$-b''_1$	$-b'_3$	$-2(c_1+c_3)$	b'	$-b$	$-b^h$	b'_2	b'_2	b_2
b_3	b_2	$-b_1$	0	$-a_2$	a_1	0	$-b''_2$	b''_1	$-2c'_3$	b'_2	$-b'_1$	$2c_3$	$-b''_3$	$2b''_3$	b'_3	$-2b'_3$	b_3
b'_1	$2c_1$	$-b'_3$	b'_2	$2c'_1$	$-b''_3$	b''_2	0	a_3	$-a_2$	0	b_3	$-b_2$	$2a_1$	$-a_1$	$2b_1$	$-b_1$	b'_1
b'_2	b'_3	$-2(c_1+c_3)$	$-b'_1$	b''_3	$-2(c'_1+c'_3)$	$-b''_1$	$-a_3$	0	a_1	$-b_3$	0	b_1	$-a_2$	$-a_2$	$-b_2$	$-b_2$	b'_2
b'_3	$-b'_2$	b'_1	$2c_3$	$-b''_2$	b''_1	$2c'_3$	a_2	$-a_1$	0	b_2	$-b_1$	0	$-a_3$	$2a_3$	$-b_3$	$2b_3$	b'_3
b''_1	$2c'_1$	$-b''_3$	b''_2	$-2c_1$	b'_3	$-b'_2$	0	b_3	$-b_2$	0	$-a_3$	a_2	$2b_1$	$-b_1$	$-2a_1$	a_1	b''_1
b''_2	b''_3	$-2(c'_1+c'_3)$	$-b''_1$	$-b'_3$	$2(c_1+c_3)$	b'_1	$-b_3$	0	b_1	a_3	0	$-a_1$	$-b_2$	$-b_2$	a_2	a_2	b''_2
b''_3	$-b''_2$	b''_1	$2c'_3$	b'_2	$-b'_1$	$-2c_3$	b_2	$-b_1$	0	$-a_2$	a_1	0	$-b_3$	$2b_3$	a_3	$-2a_3$	b''_3
c_1	$-2b''_1$	b'_2	b'_3	$-2b''_1$	b''_2	b''_3	$-2a_1$	a_2	a_3	$-2b_1$	b_2	b_3	0	0	0	0	c_1
c_3	b'_1	b'_2	$-2b'_3$	b''_1	b''_2	$-2b''_3$	a_1	a_2	$-2a_3$	b_1	b_2	$-2b_3$	0	0	0	0	c_3
c'_1	$-2b''_1$	b''_2	b''_3	$2b'_1$	$-b'_2$	$-b'_3$	$-2b_1$	b_2	b_3	$2a_1$	$-a_2$	$-a_3$	0	0	0	0	c'_1
c'_3	b''_1	b''_2	$-2b''$	$-b_1$	$-b'_2$	$2b_3$	b_1	b_2	$-2b_3$	$-a_1$	$-a_2$	$2a_3$	0	0	0	0	c'_3

ou encore avec les générateurs : $(a_1, b''_1, c'_1, 2\,c'_3 + c'_1\,;\, b_2, b_3, b'_2, b'_3)$, et la sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{su}(3)$ peut être représentée avec (a_k, b''_k, c'_1, c'_3).

$c_3 + ic'_3$	$-a_3 - ib_3$ $+ b'_3 + ib''_3$	$a_2 + ib_2$ $+ b'_2 + ib''_2$
$a_3 + ib_3$ $+ b'_3 + ib''_3$	$-c_3 - ic'_3$ $+ c_1 + ic'_1$	$-a_1 - ib_1$ $+ b'_1 + ib''_1$
$-a_2 - ib_2$ $+ b'_2 + ib''_2$	$a_1 + ib_1$ $+ b'_1 + ib''_1$	$-c_1 - ic'_1$

On aura une sous-algèbre isomorphe à £ avec l'algèbre $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$, réalisée avec $(a_k\,;\, b_k)$, et on en aura 3 autres, réalisées comme $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, avec la base $\frac{1}{2}(-\,a_k,\, b''_k,\, c'_k\,;\, b_k,\, b'_k,\, c_k)$ $(k = 1, 2, 3)$ que nous noterons $£_k$ (on a pris $-\,c_2 = c_1 + c_3$, $-\,c'_2 = c'_1 + c'_3$). Ainsi $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ se présente comme une



algèbre « couplant » (de façon non triviale) trois « rotateurs relativistes », soit trois algèbres isomorphes à £. On peut dessiner ceci (schématiquement) de la façon ci-dessus, où la face du haut est $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C}) \subset \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$, les faces latérales et la « médiane » (avec c'_2 et c_2) les trois $£_k$, et la face du bas une sous-algèbre de Cartan. On aura $\mathfrak{gl}(2, \mathbf{C})$ avec (par exemple) $£_3$ et $(2\,c'_1 + c'_3\,;\, 2\,c_1 + c_3)$. Toute représentation de l'algèbre (complexe)

$\mathfrak{a}_2$ donne une représentation de l'algèbre $\mathfrak{a}_2 \otimes \mathbf{C}$ (par multiplication par i), et d'autres de dimension double (avec $\otimes I_2$ et $\otimes J_2$) ; nous verrons que ce ne sont pas tout à fait les seules. Notre objet sera alors le suivant : afin de construire une $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X})$, nous chercherons une représentation de $\mathfrak{X}$ qui, sur un des $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X}$ (lesquels sont de deux « sortes » : $\mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$, et $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$) soit décomposable en $D_N \oplus D_4$ (ou quelque chose d'analogue, avec une représentation du même type que D_4), auquel cas on aura une intersection de dimension 2 : en effet, on écrira alors $\mathfrak{U} = \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$, et, si $\mathfrak{L}_e$ désigne le $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X}$ sur lequel on a la décomposition ci-dessus, on aura

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{X} + (I + adr)(\mathfrak{L}_e.\mathscr{P}_0) = \mathfrak{X} + \varphi(\mathscr{P}) \quad (\text{où } r \in \mathscr{R}_0 \supset \mathscr{P}_0)$$

(on peut aussi « déplacer » $\mathfrak{X}$ par un automorphisme spécial, si l'on préfère), $\mathscr{R}_0$ étant de dimension 8 ; ceci exige une représentation réelle de $\mathfrak{X}$ ayant la propriété voulue. Si on a une représentation (réelle) de dimension 10 qui, sur $\mathfrak{L}_e \subset \mathfrak{X}$, se décompose en $D_N \oplus ad$, on aura de même

$$\mathfrak{X}.\mathscr{R}_0 = U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)) \text{ [dim } \mathscr{R}_0 = 10 \text{ ici]}$$

avec intersection de dimension 2. Si enfin on a une représentation (réelle) de dimension 9, se décomposant sur un $\mathfrak{L}_e \subset \mathfrak{X}$ en $D_N \oplus D_4 \oplus O$ [ou, par exemple, $D_N \oplus (-\widetilde{D}_4) \oplus O$, car si $l \rightsquigarrow D_4(l)$ est une représentation de $\mathfrak{L}$, $l \rightsquigarrow -\widetilde{D}_4(l)$ en est une aussi ; O est la représentation triviale de dimension 1], par le même procédé, on aura $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$.

La première chose que l'on peut être tenté d'essayer, comme nous ne connaissons pas *a priori* la façon dont se décomposent les représentations de $\mathfrak{X}$ sur les diverses sous-algèbres isomorphes à $\mathfrak{L}$ (représentations qui devront de plus être à coefficients réels), c'est de considérer la représentation $D_N \oplus ad$ sur un certain $\mathfrak{L}_e \subset \mathfrak{X}$, et d'essayer de la « prolonger » à tout $\mathfrak{X}$ c'est-à-dire de calculer 10 autres matrices d'ordre 10 telles que l'on ait une base d'une représentation de $\mathfrak{X}$. Prenons alors $\mathfrak{L}_e = (a_k\,;\, b_k) \approx \mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$, et supposons-le représenté par $D_N \oplus ad$. Cherchons à construire $\mathfrak{X}$, et tout d'abord $\mathfrak{L}_3$: on arrive à une impossibilité. Si, au lieu de ad, on avait pris une autre représentation réelle en 6 dimensions de $\mathfrak{L}$, obtenue par doublement de la dimension à partir d'une représentation complexe de dimension 3, on aurait le même résultat. De même aussi si l'on prend $\mathfrak{L}_e = \mathfrak{L}_3$ et si on essaie de construire la représentation sur $(a_k\,;\, b_k) = \mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$. Si maintenant on cherche à « prolonger » à $\mathfrak{X}$ une représentation $D_N \oplus D_4$ sur un $\mathfrak{L}_e$, on aura les mêmes difficultés : on tombe rapidement sur une impossibilité, que l'on prenne $\mathfrak{L}_e = (a_k\,;\, b_k)$ ou $\mathfrak{L}_e = \mathfrak{L}_3$ (ou, ce qui revient au même $\mathfrak{L}_1$ ou $\mathfrak{L}_2$).

Remarquons alors que la représentation D_N de $\mathfrak{L}$ est le produit de Kronecker (produit de Lie-Kronecker, en algèbres de Lie) de la représentation d'ordre 2 par sa contragrédiente, et qu'elle est réelle. On peut donc s'attendre à ce que le produit de Kronecker de la représentation d'ordre 3

de $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ par sa contragrédiente, qui est d'ordre 9, soit réelle, et de plus contienne D_N sur une sous-algèbre $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. Nous sommes ainsi amenés, en définitive, à ce qui suit :

4. Calcul d'une unification $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1))$, pour $\mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$. Nous chercherons à construire une représentation réelle de dimension 9 de $\mathfrak{X}$ qui, sur un $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, soit par exemple $\mathfrak{L}_3 = \frac{1}{2}(c'_3, b''_3, a_3 ; c_3, b'_3, -b_3)$, se décompose en $D_N \oplus (-\widetilde{D}_4) \oplus O$ (O : triviale d'ordre 1).

Il nous sera commode de la chercher sous la forme d'une représentation d'ordre 10 (que l'on trouvera être réductible en une représentation d'ordre $9 \oplus O$), réduite sur $\mathfrak{L}_3$ en $D_N \oplus (-\widetilde{D}_4) \oplus O \oplus O$, pour des raisons de symétrie dans les calculs.

On prend pour représentants des générateurs $(\frac{1}{2} c'_3, \ldots, -\frac{1}{2} b_3)$ de $\mathfrak{L}_3$, pris dans cet ordre, ceux que l'on a en représentant les éléments $(a_1, \ldots, b_3)$ de $\mathfrak{sl}(4, \mathbf{R})$ par D_N et par $-\widetilde{D}_4$. Il reste à trouver les représentants des 10 autres éléments de base (dans la base choisie).

Cherchons donc

$$a_1 = \sum_1^0 \lambda_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \ldots, 9, 0)$$

($E_{\alpha\beta}$ est la base canonique de $\mathfrak{gl}$). On a

$$\tfrac{1}{2} a_3 = E_{21} - E_{12} + \tfrac{1}{2}(E_{65} - E_{56} + E_{87} - E_{78}) .$$

On écrit alors que $[a_3, a_1] = a_2$, puis $[a_2, a_3] = a_1$, ce qui donne a_1 et a_2 en fonction de 40 coefficients λ seulement (au lieu de 100 *a priori*), répartis en 10 groupes de 4. On écrit alors

$$b_1 = \sum_1^0 \lambda'_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta} , \quad \text{et} \quad [a_3 , b_1] = b_2 , \ [b_2 , a_3] = b_1 ,$$

d'où b_1, b_2 en fonction de 40 coefficients λ'. De plus, $[a_1, b_3] = -b_2$, d'où les λ' en fonction des λ. On écrit alors $[a_1, a_2] = a_3$, d'où des relations entre les λ, et $[b_1, b_2] = -a_3$, d'où des relations entre les λ' (relations opposées), lesquelles permettront de préciser celles entre les λ. On écrira encore les relations entre les λ obtenues en écrivant les relations de commutation $[a_1, b_1] = 0$, et $[b_1, a_2] = b_3$. Or nous construisons une algèbre de matrices, pour laquelle l'identité de Jacobi est automatiquement vérifiée. En écrivant cette dernière, on trouve aisément que toutes les relations de commutation de l'algèbre $\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{so}(3, \mathbf{C}) = (a_k ; b_k)$ sont vérifiées. Les conditions obtenues sur les λ (même simplifiées par des considérations vectorielles) sont trop longues pour être écrites ici (elles tiennent 3 pages). Nous allons les simplifier en supposant (ce qui d'ailleurs semble s'imposer, d'après l'allure des conditions obtenues) que la matrice représentant a_1 est antisymétrique (donc aussi celle de a_2, alors que celles de b_1 et b_2 seront

symétriques). Ceci fait, nous les simplifierons encore en écrivant les relations de commutation $b'_2 = [a_1, b'_3] = [b_2, c'_3] = [b''_3, b_1]$, et aussi en exprimant sous forme vectorielle ces conditions. Nous obtenons alors les conditions (pour $a_1 = \sum \lambda_{\alpha\beta} E_{\alpha\beta}$ comme ci-dessus) :

$$\lambda_{\alpha\beta} = -\lambda_{\beta\alpha}, \lambda_{26} = \lambda_{15} = \cos\theta\cos\varphi = \lambda_{45} = \lambda_{37} = k'\lambda_{50} = kk'\lambda_{59},$$

où

$$k'^2 = \frac{1}{2}(1 + k^2) \ (k \text{ constante} \neq 0) \text{ et } 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi ;$$

on aura aussi :

$$\lambda_{16} = -\lambda_{25} = \cos\theta\sin\varphi = -\lambda_{46} = -\lambda_{38} = -k'\lambda_{60} = -kk'\lambda_{69},$$

$$\lambda_{17} = \lambda_{28} = -\sin\theta\sin\varphi = -\lambda_{35} = -\lambda_{47} = -k'\lambda_{70} = -kk'\lambda_{79},$$

et encore

$$\lambda_{18} = -\lambda_{27} = \sin\theta\cos\varphi = \lambda_{36} = \lambda_{48} = k'\lambda_{80} = kk'\lambda_{89} ;$$

les autres sont nuls.
Ecrivons alors $[c'_1, b''_1] = 2a_1$: il vient $k^2 = 1$ et $\sin 2\varphi = 0$, ou encore $\sin 2\varphi = 0$, $\sin 2\theta = 0$, et k quelconque. La première condition contient en fait l'autre, puisque le lien entre k et k' rend la représentation (de dimension 10) réductible en $\mathbf{9} \oplus \mathbf{1}$. On vérifie qu'alors les relations

$$[c'_1, b''_1] = 2a_1, \ [c'_1, a_1] = -2b''_1, \ [c'_1, b''_2] = -a_2 ; \ [c_1, a_1] = -2b'_1,$$
$$[c_1, b'_1] = -2a_1, \ [c_1, b''_1] = -2b_1 ; \ [a_2, b''_2] = 2c'_2, \ [b''_2, c'_2] = 2a_2,$$
$$[c'_2, a_2] = 2b''_2, \ [a_2, b'_2] = 2c_2 ; \ c_2 \text{ avec } a_2, b'_2, b''_2 ; \text{ et enfin celles de}$$

c_3 et c'_3 avec $a_1, b_1, b'_1, b''_1, a_2, b_2, b''_2$, sont vérifiées (en faisant dans tous les cas $k^2 = 1$), et que celles-ci, d'après l'identité de Jacobi, appliquée plusieurs fois au besoin, entraînent les autres (on utilise évidemment aussi l'antisymétrie du crochet). On peut alors réduire la représentation obtenue sous la forme $D_9 \oplus O$, où D_9 est une représentation irréductible de dimension 9 de $\mathfrak{X}$. En effet, toutes les matrices de la représentation obtenue de $\mathfrak{X}$ sont de la forme :

$$\begin{pmatrix} A & kk'\alpha & k'\alpha \\ kk'\beta & h & kh \\ k'\beta & kh & h \end{pmatrix}$$

où A est une matrice d'ordre 8, $k^2 = k'^2 = 1$, α est un vecteur-colonne et β un vecteur-ligne (d'ordre 8), les matrices représentant les éléments de base étant symétriques ou antisymétriques.

La matrice de passage

$$V = \begin{pmatrix} I_8 & & 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} kk' & & k' \\ k' & & -kk' \end{pmatrix} & \\ 0 & & \end{pmatrix} = V^{-1}$$

les amène sous la forme

$$\begin{pmatrix} A & \sqrt{2}\,\alpha & 0 \\ \sqrt{2}\,\beta & 2h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donc réduit la représentation obtenue en $D_9 \oplus O$ (I_n dénote ici l'identité d'ordre n).

Cette représentation est irréductible car, après transformation, l'élément $2c_1 + c_3$ est représenté par

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2I_4 & 0 & 0 \\ 0 & I_4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cos 2\varphi \text{ (et } \cos^2 2\varphi = 1),$$

donc par une matrice régulière, qui ne peut donc être réduite en une matrice d'ordre $8 \oplus 0$ par une similitude (transformation $A_1 \to V_1^{-1} A_1 V_1$, pour une certaine matrice V_1 régulière) ; or D_9 se réduit, sur la sous-algèbre compacte maximale su(3) engendrée par les éléments (a_k, b''_k, c'_1, c'_3) $(k = 1, 2, 3)$ seulement en une représentation réelle de dimension 8 (équivalente à l'adjointe, qui est, à une équivalence près, la seule irréductible de su(3) en cette dimension) $\oplus O$ (O : représentation triviale en dimension 1), comme on le voit par un argument semblable à celui que l'on vient d'utiliser (c'est d'ailleurs visible directement sur les matrices antisymétriques réelles représentant la base ci-dessus, car leur 9e ligne ou colonne est $\sqrt{2}$ fois la 4e). Par le procédé que nous avons indiqué, on trouve deux représentations D_9 et D'_9 (car, en prenant θ modulo π, on a 2 choix possibles pour φ tel que $\sin 2\varphi = 0$), qui coïncident sur $\mathfrak{L}_3$ avec $D_N \oplus (-\tilde{D}_4) \oplus O$, et qui en outre sont reliées par $D_9(\mathfrak{L}_1) = D'_9(\mathfrak{L}_2)$ et $D_9(\mathfrak{L}_2) = -D'_9(\mathfrak{L}_1)$ (c'est-à-dire $D_9(a_1) = D'_9(a_2)$, etc) : on a donc essentiellement la même représentation ; nous donnerons ici D_9. Pour ne pas compliquer la présentation des résultats, on donne (table IV) directement les relations de commutation du produit semi-direct $\mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$, où $\mathscr{R}_0$ (de dimension 9) a pour base p_1, p_2, p_3, p_4 (base de $\mathscr{P}_0$), q_1, q_2, q_3, q_4 (base de $\mathscr{Q}_0$, correspondant à l'espace de la représentation $-\tilde{D}_4$), et un élément que nous noterons $r_0 = \sqrt{2}\, r'_0$; à partir de cela, la reconstitution de D_9 est immédiate : par exemple $[a_1, p_1] = -q_1 \cos\theta - q_4 \sin\theta$ montre que la 1re colonne du représentant

de a_1 est $-\cos\theta$ à la 5e ligne, $-\sin\theta$ à la 8e, et 0 ailleurs ; de même, $[a_1, q_4] = \sin\theta(p_1 + p_4 - r_0)$ montre que sa 8e colonne est $\sin\theta$ aux 1re et 4e lignes, $-\sqrt{2}\sin\theta$ à la 9e, et 0 ailleurs. Ici, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ (modulo π).

Nous avons bien ainsi une unification $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1)) = \mathfrak{U}$. En effet, on peut tout d'abord voir (et ceci est lié à l'irréducibilité de D_9) que l'idéal $\mathscr{R}_0$ ($\mathfrak{U} = \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$) doit être commutatif ; car si l'on cherche les relations de commutation de $\mathscr{R}_0$ telles que $D_9(\mathfrak{X}) \subset \text{Dér}\,(\mathscr{R}_0)$, c'est-à-dire que $D_9(x)$ soit une dérivation de $\mathscr{R}_0$ pour tout $x \in \mathfrak{X}$ (on le vérifiera sur une base), on trouve (il suffira de prendre $\mathfrak{L}_3$, c_1, c_1' pour simplifier notablement les relations de commutation possibles, et l'utilisation de $D_9(x)$, pour $x = a_1, a_2, b_1'', b_2''$ annulera toutes les constantes) que $\mathscr{R}_0$ est nécessairement commutatif (et pas seulement résoluble). On considérera alors

$$\mathfrak{L}_3' = (I + adq_0)\,\mathfrak{L}_3,$$

où $q_0 \in \mathscr{Q}_0$ est une combinaison linéaire réelle des $q_1, \ldots, q_4$; par exemple, on prendra $q_0 = 2\alpha q_4$, où α est une constante. On voit immédiatement que $[\mathfrak{L}_3', \mathscr{P}_0] = [\mathfrak{L}_3, \mathscr{P}_0]$, et, comme $\mathfrak{L}_3' \approx \mathfrak{L}$, et comme D_9 se réduit à D_N sur $\mathfrak{L}_3$ pour le sous-espace $\mathscr{P}_0$, on aura $\varphi(\mathscr{P}) = (I + adq_0)\,(\mathfrak{L}_3.\mathscr{P}_0) \approx \mathscr{P}$. Or, de même qu'on l'a fait pour l'unification de $\mathfrak{L}$ et $\mathscr{P}$ avec $D_N \oplus D_4$, on vérifie aisément qu'en général (et en particulier pour $q_0 = 2\alpha q_4$) $\mathfrak{L}_3' \cap \mathfrak{L}_3$ est une sous-algèbre commutative de dimension 2. Donc $\mathfrak{X} \cap \varphi(\mathscr{P})$ est de dimension 2, et par conséquent $\mathfrak{U} = \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$ est une unification cherchée.

5. Recherche d'un terme correctif à $g^{\mu\nu}\,p_\mu\,p_\nu$ dans l'unification trouvée. $g^{\mu\nu}\,p_\mu\,p_\nu$ est un terme d'ordre 2 dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{U}$. Nous aimerions trouver un élément du centre de cette algèbre qui le contienne. Mais la représentation D_9 de $\mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ n'est pas « orthogonale », c'est-à-dire que $D_9(\mathfrak{X})$ n'est pas contenu dans une réalisation 9-dimensionnelle d'une forme réelle de l'algèbre $\mathfrak{b}_4$: ceci n'est pas pour nous surprendre, car nous savons que $\mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_2$ est sous-algèbre (régulière) maximale (semi-simple) dans $\mathfrak{b}_6$, et est aussi maximale (non simple non régulière) dans $\mathfrak{a}_8$ (puisque SL(3) $\otimes$ SL(3) est maximal dans SL(9)), d'après les résultats de l'étude de Dynkin ([14]), mais qu'elle n'est pas contenue dans $\mathfrak{b}_4$ — et ce qui est vrai pour une algèbre réelle, au point de vue inclusions, etc., s'étend immédiatement aux algèbres obtenues par extension à $\mathbf{C}$ du corps des scalaires. Ceci, comme nous allons le voir, sera une source de difficulté, dans la mesure où nous cherchons un invariant d'ordre deux dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{U}$. Soient en effet $x, y, z \in \mathfrak{X}$, $\gamma_0, g_0, h_0 \in \mathscr{R}_0$, et posons

$$\gamma_0' = [\gamma_0, y],\ \gamma_0'' = [\gamma_0, z],\ g_0' = [x, g_0],\ y' = [x, y],\ h_0' = [x, h_0]\,,$$

$$\text{et } z' = [x, z]\,.$$

TABLE IV. *Relations de commutation* [$\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$, *idéal*]

] \ [	p_1	p_2	p_3	p_4	q_1	q_2	q_3	q_4	r_0	] / [
a_1	$-q_1\cos\theta - q_4\sin\theta$	$-q_2\cos\theta + q_3\sin\theta$	$-q_2\sin\theta - q_3\cos\theta$	$-q_1\cos\theta - q_4\sin\theta$	$\cos\theta(p_1+p_4-r_0)$	$p_2\cos\theta + p_3\sin\theta$	$-p_2\sin\theta + p_3\cos\theta$	$\sin\theta(p_1+p_4-r_0)$	$2(q_1\cos\theta + q_4\sin\theta)$	a_1
a_2	$q_2\cos\theta - q_3\sin\theta$	$-q_1\cos\theta - q_4\sin\theta$	$q_1\sin\theta - q_4\cos\theta$	$-q_2\cos\theta + q_3\sin\theta$	$p_2\cos\theta - p_3\sin\theta$	$\cos\theta(-p_1 + p_4 - r_0)$	$\sin\theta(p_1 - p_4 + r_0)$	$p_2\sin\theta - p_3\cos\theta$	$2(q_2\cos\theta - q_3\sin\theta)$	a_2
a_3	$2p_2$	$-2p_1$	0	0	q_2	$-q_1$	q_4	$-q_3$	0	a_3
b_1	$-q_1\sin\theta + q_4\cos\theta$	$-q_2\sin\theta - q_3\cos\theta$	$q_2\cos\theta - q_3\sin\theta$	$-q_1\sin\theta + q_4\cos\theta$	$-\sin\theta(p_1 + p_4 + r_0)$	$-p_2\sin\theta + p_3\cos\theta$	$-p_2\cos\theta - p_3\sin\theta$	$\cos\theta(p_1 + p_4 + r_0)$	$2(-q_1\sin\theta + q_4\cos\theta)$	b_1
b_2	$q_2\sin\theta + q_3\cos\theta$	$-q_1\sin\theta + q_4\cos\theta$	$-(q_1\cos\theta + q_4\sin\theta)$	$-q_2\sin\theta - q_3\cos\theta$	$-p_2\sin\theta - p_3\cos\theta$	$\sin\theta(p_1 - p_4 - r_0)$	$\cos\theta(p_1 - p_4 - r_0)$	$p_2\cos\theta - p_3\sin\theta$	$2(-q_2\sin\theta - q_3\cos\theta)$	b_2
b_3	0	0	$-2p_4$	$-2p_3$	$-q_3$	$-q_4$	$-q_1$	$-q_2$	0	b_3
b'_1	$q_1\cos\theta + q_4\sin\theta$	$q_2\cos\theta - q_3\sin\theta$	$q_2\sin\theta + q_3\cos\theta$	$q_1\cos\theta + q_4\sin\theta$	$\cos\theta(p_1 + p_4 + r_0)$	$p_2\cos\theta + p_3\sin\theta$	$-p_2\sin\theta + p_3\cos\theta$	$\sin\theta(p_1 + p_4 + r_0)$	$2(q_1\cos\theta + q_4\sin\theta)$	b'_1
b'_2	$q_2\cos\theta - q_3\sin\theta$	$-q_1\cos\theta - q_4\sin\theta$	$q_1\sin\theta - q_4\cos\theta$	$-q_2\cos\theta + q_3\sin\theta$	$-p_2\cos\theta + p_3\sin\theta$	$\cos\theta(p_1 - p_4 - r_0)$	$\sin\theta(-p_1 + p_4 + r_0)$	$-p_2\sin\theta - p_3\cos\theta$	$2(-q_2\cos\theta + q_3\sin\theta)$	b'_2
b'_3	0	$2p_4$	0	$2p_2$	q_2	q_1	$-q_4$	$-q_3$	0	b'_3
b''_1	$q_1\sin\theta - q_4\cos\theta$	$q_2\sin\theta + q_3\cos\theta$	$-q_2\cos\theta + q_3\sin\theta$	$q_1\sin\theta - q_4\cos\theta$	$\sin\theta(-p_1 - p_4 + r_0)$	$-p_2\sin\theta + p_3\cos\theta$	$-p_2\cos\theta - p_3\sin\theta$	$\cos\theta(p_1 + p_4 - r_0)$	$2(-q_1\sin\theta + q_4\cos\theta)$	b''_1
b''_2	$q_2\sin\theta + q_3\cos\theta$	$-q_1\sin\theta + q_4\cos\theta$	$-q_1\cos\theta - q_4\sin\theta$	$-q_2\sin\theta - q_3\cos\theta$	$p_2\sin\theta + p_3\cos\theta$	$\sin\theta(-p_1 + p_4 - r_4)$	$\cos\theta(-p_1 + p_4 - r_0)$	$-p_2\cos\theta + p_3\sin\theta$	$2(q_2\sin\theta + q_3\cos\theta)$	b''_2
b''_3	$-2p_3$	0	$2p_1$	0	$-q_3$	q_4	q_1	$-q_2$	0	b''_3
c_1	$-(p_1+p_4)$	$-p_2$	$-p_3$	$-(p_1+p_4)$	0	q_2	q_3	0	$2r_0$	c_1
c_3	$2p_4$	0	0	$2p_1$	q_1	$-q_2$	$-q_3$	q_4	0	c_3
c'_1	0	$-p_3$	p_2	0	$-2q_4$	q_3	$-q_2$	$2q_1$	0	c'_1
c'_3	0	$2p_3$	$-2p_2$	0	q_4	q_3	$-q_2$	$-q_1$	0	c'_3

On voit de suite que ($\mathscr{R}_0$ étant un idéal commutatif) :

$$[x, (y + g_0)^2] = 2(x + g_0)\, y' + 2\, g_0'(y + g_0) + \\ + [y', x] + [y', g_0] + [y, g_0'] .$$

$$[\gamma_0, (y + g_0)^2] = 2\, \gamma_0'(y + g_0) + [y, \gamma_0'] .$$

$$[x, (y + g_0)\,(z + h_0)] = (y' + g_0')\,(z + h_0) + (y + g_0)\,(z' + h_0')$$

$$[\gamma_0, (y + g_0)\,(z + h_0)] = (\gamma_0'\, z + y\gamma_0'') + (\gamma_0'\, h_0 + g_0\, \gamma_0'') .$$

Si alors on recherche une combinaison $\Sigma(y + g_0)^2 + \Sigma(y + g_0)\,(z + h_0)$ d'ordre 2 dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{U}$ qui commute avec tout $\mathfrak{X}$, on devra avoir $[x, \Sigma y^2 + \Sigma yz] = 0$, donc $\Sigma y^2 + \Sigma yz$ devra être un opérateur de Casimir (invariant d'ordre 2) de $\mathfrak{X}$. Si on veut que de plus la combinaison commute avec tout $\mathfrak{U}$, on ne pourra prendre les g_0 et h_0 nuls, et alors on devra avoir $[x, \Sigma g_0^2 + \Sigma g_0\, h_0] = 0$ (on devra aussi l'avoir si on veut un invariant contenant $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu$). Nous devons donc chercher une combinaison d'ordre 2 d'éléments de $\mathscr{R}_0$ contenant $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu$ et qui commute avec tout $\mathfrak{X}$. Posons

$$- m^2 = g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 - p_4^2 .$$

On sait que $[\mathfrak{L}_3, m^2] = 0$, et on voit de plus que $[c_1', m^2] = 0$. Formons alors un grand tableau (que nous ne reproduirons pas ici) donnant les relations de commutation des éléments de base de $\mathfrak{X}$ avec tous les produits 2 à 2 (p_μ^2, q_μ^2, r_0^2, $p_\mu\, q_\mu$, $p_\mu\, q_\nu$, $p_\mu\, p_\nu$, $q_\mu\, q_\nu$, $p_\mu\, r_0$, $q_\mu\, r_0$) des éléments de base de $\mathscr{R}_0$. On y verra que :

$$\tfrac{1}{2}[a_1, m^2] = q_1 \cos\theta(p_1 - p_4) + q_2(p_2 \cos\theta + p_3 \sin\theta) \\ + q_3(- p_2 \sin\theta + p_3 \cos\theta) + q_4 \sin\theta(p_4 - p_1)$$

d'où

$$\tfrac{1}{2}[a_1, m^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2] = \\ = q_1 \cos\theta(r_0 - 2\, p_4) + q_4 \sin\theta(r_0 - 2\, p_1) = [a_1, - 2\, p_4\, r_0]$$

et on verra de même que $m^2 - q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2 + 2\, p_4\, r_0$ commute avec les générateurs (a_k, b_k'', c_1', c_3'), de $\mathfrak{su}(3)$, mais pas avec les autres. De plus, la simple considération des relations de commutation de $\mathfrak{L}_3$ et de a_1 avec les produits 2 à 2 ci-dessus montre que l'on ne peut pas trouver de combinaison de ces produits qui commute avec tout $\mathfrak{X}$. Il n'existe donc pas, dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{U}$, d'invariant (global) d'ordre 2. Par contre, les combinaisons

$$\mathscr{C}_1 = p_4 + \tfrac{1}{2}\, r_0$$

et

$$\mathscr{C}_2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + \tfrac{1}{3}(p_4 - r_0)^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 + q_4^2 ,$$

donc aussi

$$-\mathscr{C} = \mathscr{C}_2 - \tfrac{4}{3}\mathscr{C}_1^2 =$$
$$= \boldsymbol{p}^2 - p_4^2 - 2\,p_4\,r_0 + \boldsymbol{q}^2 + q_4^2 \left(\boldsymbol{p}^2 = \sum_1^3 p_k^2,\ \boldsymbol{q}^2 = \sum_1^3 q_k^2\right),$$

commutent avec la sous-algèbre compacte maximale $\mathfrak{su}(3)$ (représentée par les a_k, b_k'', c_1', c_3'), ainsi évidemment qu'avec l'idéal $\mathscr{R}_0$. La forme de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ montre bien que D_9 se réduit en une représentation (« orthogonale ») de dimension 8, $\oplus\, O$, sur $\mathfrak{su}(3)$. Nous avons ainsi obtenu :

$$\underline{m^2 = \mathscr{C} - 2\,\mathscr{C}_1\,r_0 + \boldsymbol{q}^2 + q_4^2 + r_0^2}$$

où $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ commutent avec $\mathfrak{su}(3)$ et avec $\mathscr{R}_0$, puisque l'on a

$$2\,p_4\,r_0 = 2\,\mathscr{C}_1\,r_0 - r_0^2 .$$

Remarque. En utilisant l'inclusion $\mathfrak{a}_2 \oplus \mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{d}_6$, on pourra obtenir une représentation « orthogonale » de $\mathfrak{X}$ en dimension 12 ; en formant le produit semi-direct correspondant avec un idéal de dimension 12, on aura un invariant d'ordre 2 ; il faudra encore que la représentation obtenue se décompose sur un $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{X}$ en $D_N \oplus$ (autre chose), et on aura alors une unification de $\mathscr{P}$, $\mathfrak{X}$, et d'au moins deux u(1) supplémentaires. Dans notre cas, nous pourrons avoir un invariant global (cf. ([14])), mais il sera alors d'ordre supérieur (sans doute d'ordre 9), ce qui rendra son expression très compliquée.

6. Modèle « $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ contracté ». Expression du terme correctif à l'aide des nombres quantiques internes. Soit $u \in \mathfrak{U}$, où

$$\mathfrak{U} = U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1)) = \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0 = \mathfrak{X}.(\mathscr{P}_0 + \mathscr{Q}_0 + (r_0)),\ \mathfrak{X} = \mathfrak{sl}(3, \mathbf{C}) .$$

Ecrivons alors $u = a + b + r$, où $a \in \mathfrak{a} = \mathfrak{su}(3)$, $b \in \mathfrak{b} = J\mathfrak{su}(3)$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ étant une décomposition de Cartan de $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$, et $r \in \mathscr{R}_0$. On a les relations suivantes :

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a},\ [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{b},\ [\mathfrak{a}, \mathscr{R}_0] = (\mathscr{P}_0 + \mathscr{Q}_0) \subset \mathscr{R}_0 ,$$
$$[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \mathfrak{a},\ [\mathfrak{b}, \mathscr{R}_0] = \mathscr{R}_0 .$$

Multiplions par $\rho \in \mathbf{R}$ les générateurs de $\mathfrak{b}$ et $\mathscr{R}_0$; la table de multiplication de $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ s'écrit alors de la façon suivante :

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a},\ [\mathfrak{a}, \rho\mathfrak{b}] = \rho\mathfrak{b},\ [\mathfrak{a}, \rho\mathscr{R}_0] = \rho(\mathscr{P}_0 + \mathscr{Q}_0) ,$$
$$[\rho\mathfrak{b}, \rho\mathfrak{b}] = \rho^2\,\mathfrak{a},\ [\rho\mathfrak{b}, \rho\mathscr{R}_0] = \rho^2\,\mathscr{R}_0 .$$

En posant $\mathfrak{b}' = \rho\mathfrak{b}$, $\mathscr{R}'_0 = \rho\mathscr{R}_0$, on obtient une algèbre de Lie $\mathfrak{U}(\rho)$, dont les constantes de structure dépendent de ρ, isomorphe à $\mathfrak{U}$ pour $\rho \neq 0$, et dont la table de multiplication peut se résumer comme suit :

$$\mathfrak{U}(\rho) : [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] = \mathfrak{a}, [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}'] = \mathfrak{b}', [\mathfrak{a}, \mathscr{R}'_0] = (\mathscr{P}'_0 + \mathscr{Q}'_0) \subset \mathscr{R}'_0 ,$$

$$[\mathfrak{b}', \mathfrak{b}'] = \rho^2 \mathfrak{a}, [\mathfrak{b}', \mathscr{R}'_0] = \rho\mathscr{R}'_0 ,$$

c'est-à-dire que les constantes de structure de $\mathfrak{U}(\rho)$ sont les mêmes que celles de $\mathfrak{U}(1) = \mathfrak{U}$, sauf celles des deux derniers types qui sont multipliées (respectivement) par ρ^2 et par ρ. Si $\rho \to 0$, $\mathfrak{U}(\rho)$ tend (au sens défini par exemple par I. E. Segal, Duke Math. Journal, *18* (1951), 221) vers l'algèbre-limite $\mathfrak{U}(0) \approx \mathfrak{a}.(\mathfrak{b}_0 \oplus \mathscr{R}_0)$, produit semi-direct de $\mathfrak{su}(3)$ par un idéal commutatif de dimension $8 + 9 = 17$, défini par la représentation $ad_{\mathfrak{a}} \oplus D_9$ (laquelle est d'ailleurs réductible, sur $\mathfrak{su}(3)$, en $ad \oplus ad \oplus O$, ad désignant la représentation adjointe de $\mathfrak{a}$).

Ici, il convient d'ouvrir une parenthèse sur le sens physique de la notion d'algèbre-limite. Nous savons qu'en physique, la commutation ou la non-commutation de quantités, ainsi que les commutateurs eux-mêmes, caractérisent le « niveau » dans lequel on travaille. Par exemple, au niveau classique, tout est commutatif (on ne considère que des fonctions) ; au niveau quantique, les p par exemple commutent entre eux, les q aussi, mais $[p, q] \neq 0$; à un niveau « plus fin », les p (par exemple) ne commutent pas nécessairement entre eux. D'autre part, un très petit changement des constantes de structure (des relations de commutation) ne change pas le niveau dans lequel on travaille, et d'ailleurs, du point de vue expérimental, vu l'imprécision des mesures, un changement suffisamment petit des constantes de structure n'est pas décelable.

A cause de ces considérations, la notion d'algèbres « voisines » (au sens de Segal, c'est-à-dire ayant des constantes de structure « voisines »), et celle d'algèbre limite, dont nous venons de montrer un exemple, reçoit un certain sens physique ; de plus, ce n'est pas un miracle qu'à la limite on ait ce que l'on peut appeler aussi un modèle étendu de $\mathfrak{su}(3)$ (contenant ce dernier et l'opérateur de masse — il se trouve d'ailleurs, comme on le verra, que les opérateurs que l'on utilise dans la formule de masse obtenue figurent dans la sous-algèbre $\mathfrak{su}(3)$. $\mathscr{R}_0$ dont $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ sont des invariants), car on sait que, phénoménologiquement, $\mathfrak{su}(3)$ a, jusqu'à un certain point, donné des résultats convenables.

Dans l'algèbre limite $\mathfrak{U}(0)$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ donnent des invariants globaux (au lieu de commuter seulement avec $\mathfrak{a}$ et $\mathscr{R}_0$) ; dans $\mathfrak{U}(\rho)$, $[\mathfrak{b}', \mathscr{C}'_1] \subset \rho\mathscr{R}'_0$ et $[\mathfrak{b}', \mathscr{C}'] \subset \rho\mathscr{R}'_0\,\mathscr{R}'_0$, où $\mathscr{R}'_0\,\mathscr{R}'_0$ désigne l'ensemble des combinaisons bi-linéaires des éléments de $\mathscr{R}'_0$ (et $\mathscr{C}'_1$, $\mathscr{C}'$ les éléments correspondants à $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}$ dans $\mathscr{R}'_0$ et $\mathscr{R}'_0\,\mathscr{R}'_0$). Pour ρ très petit, $[\mathfrak{b}', \mathscr{C}'_1]$ et $[\mathfrak{b}', \mathscr{C}']$ seront donc

très petits par rapport à (par exemple) $[\mathfrak{a}, m'^2]$ (où $m'^2 = -\, g^{\mu\nu}\, p'_\mu\, p'_\nu$), c'est-à-dire que

$$-\, 2\,\mathscr{C}'_1\, r'_0 = -\, 2\,\widetilde{\mathscr{C}}'_1\, r'_0 + \varepsilon_1(\rho) \text{ et } \mathscr{C} = \widetilde{\mathscr{C}}' + \varepsilon(\rho)\,,$$

où $\widetilde{\mathscr{C}}$ et $\widetilde{\mathscr{C}}'$ commutent avec tout $\mathfrak{U}(\rho)$ et $\varepsilon_1(\rho)$, $\varepsilon(\rho)$ ont des commutateurs (avec $\mathfrak{U}(\rho)$) très petits par rapport à $[\mathfrak{a}, m'^2]$. Dans l'algèbre $\mathfrak{U}(\rho)$, on a donc la formule :

$$m'^2 = \widetilde{\mathscr{C}}' - 2\,\widetilde{\mathscr{C}}'_1\, r'_0 + \boldsymbol{q}'^2 + q'^2_4 + r'^2_0 + \varepsilon(\rho) + \varepsilon_1(\rho)\,.$$

Or $\mathfrak{U}(\rho) \approx \mathfrak{U}$ pour $\rho \neq 0$ (et d'ailleurs on ne change pas les relations de commutation de $\mathfrak{U}$ en multipliant les générateurs de $\mathscr{R}_0$ par un même facteur réel $\neq 0$).

Ainsi, la formule $m^2 = \mathscr{C} - 2\mathscr{C}_1\, r_0 + \boldsymbol{q}^2 + q_4^2 + r_0^2$ donnera (en exprimant le terme correctif en fonction des nombres quantiques internes) une formule de masse au sens où nous l'entendons au 1), à une perturbation aussi faible que l'on voudra près. Rigoureusement, on considérera que l'on fait une unification contractée de $\mathfrak{X}$, $\mathscr{P}$, et $\mathfrak{u}(1)$, qui est unification de « $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ contracté » en $\mathfrak{su}(3)$. $\mathfrak{b}_0$, de $\mathfrak{u}(1)$, et de $\mathscr{P}$ contracté en $\mathfrak{so}(3)$. $(\mathscr{T}_0 \oplus \mathscr{P}_0)$, où $\mathscr{T}_0$ est un idéal commutatif de dimension 3 ; dans cette « unification contractée » $\mathfrak{U}(0)$, les relations de commutation de la sous-algèbre $\mathfrak{su}(3)$. $\mathscr{R}_0$, qui (comme on le verra) est celle où figurent la masse (au carré), sa correction (et l'expression de cette correction à l'aide des nombres internes) sont d'ailleurs les mêmes que dans l'unification $\mathfrak{U}$.

Considérons alors $\mathfrak{U} = \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$ et prenons $\mathscr{P} = \mathfrak{L}'_3.\mathscr{P}_0 \subset \mathfrak{U}$, où $\mathfrak{L}'_3 = (I + 2\, ad\alpha q_4)\, \mathfrak{L}_3$ (notations du paragraphe précédent). Notons J_k, N_k les générateurs de $\mathfrak{L}'_3$, les J_k engendrant l'algèbre $\mathfrak{so}(3)$; soit

$$\boldsymbol{R} = (R_k) = (\tfrac{1}{2}\, c'_3, \tfrac{1}{2}\, b''_3, \tfrac{1}{2}\, a_3)$$

le « vecteur rotation » de $\mathfrak{L}_3$ ($k = 1, 2, 3$) : on a $[R_i, R_j] = \varepsilon_{ijk}\, R_k$; posons $\boldsymbol{J} = (J_k)$ et $\boldsymbol{N} = (N_k)$. On a alors, d'après les relations de commutation de l'unification, $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{R} + \alpha \boldsymbol{q}$ (où $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$), et $N_1 = \frac{1}{2}\, c_3 - \alpha q_4$. On en déduit par conséquent :

$$\boldsymbol{q}^2 = \frac{1}{\alpha^2}(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{R})^2 = \frac{1}{\alpha^2}(\boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{R}^2 - \boldsymbol{J}.\boldsymbol{R} - \boldsymbol{R}.\boldsymbol{J}) = \frac{1}{\alpha^2}(\boldsymbol{J}^2 + \boldsymbol{R}^2 - 2\,\overline{\boldsymbol{J}.\boldsymbol{R}})$$

où le trait indique l'expression à symétriser (c'est-à-dire qu'en général on aura

$$\overline{a_1 \ldots a_n} = \frac{1}{n\,!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)})\,,$$

où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe des permutations de n objets). De plus, on aura $\alpha = \alpha(J)$, fixé pour J fixé.

Considérons maintenant $\mathfrak{U}$ représentée linéairement dans un espace d'opérateurs $\mathscr{K}$; on aura $\boldsymbol{R} \in \mathscr{K} \otimes E$, $\boldsymbol{J} \in \mathscr{K} \otimes E'$ où E et E' sont des espaces vectoriels réels de dimension 3 ; en les supposant mis en dualité, (ce qui est toujours possible), on pourra définir le produit scalaire $\boldsymbol{R}.\boldsymbol{J} \in \mathscr{K}$. Notons que la définition de $\mathscr{K} \otimes E$ est en fait celle des opérateurs tensoriels irréductibles (au sens de Wigner-Racah). Soit A une matrice du groupe SO(3) dans sa réalisation tridimensionnelle : on sait qu'elle conserve le produit scalaire de vecteurs, et par conséquent on aura $\overline{A\boldsymbol{R}.A\boldsymbol{J}} = \overline{\boldsymbol{R}.\boldsymbol{J}}$. Or $A \in \mathrm{Aut}\,(\mathfrak{so}(3))$, comme on l'a vu au chapitre II, et par conséquent $[AR_i, AR_j] = \varepsilon_{ijk}\, AR_k$, et de même pour $\boldsymbol{J}$. De plus, on peut toujours s'arranger pour que $A\boldsymbol{J} = (0, 0, AJ_3)$ (pour ce qui est des valeurs propres des opérateurs correspondants), et alors $\overline{\boldsymbol{R}.\boldsymbol{J}} = (AJ_3)\,(AR_3)$, en passant aux valeurs propres et en considérant $\boldsymbol{J}$ donné.

Ici il convient de faire une remarque, valable pour ce qui précède et en général pour l'expression de la correction en fonction des nombres quantiques internes. Le traitement fait est formel (pour ce qui est des applications aux représentations de dimension finie, à l'aide desquelles on classifie) car on ne peut rigoureusement considérer le spectre des opérateurs en question que dans les représentations de dimension infinie, et le traitement usuel de la mécanique quantique n'est pas nécessairement applicable (on touche vraisemblablement là à un niveau subquantique, comme nous l'expliquerons plus loin).

Faisons alors l'identification suivante : $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ (isospin), le produit $2\overline{\boldsymbol{J}.\boldsymbol{R}}$ définissant $(PC)\, I_3 = AR_3$, et donnant $2\,\lambda(J)\,(PC)\, I_3$ pour $\boldsymbol{J}$ fixé dans la formule ; à partir de ceci on pourra (pour chaque $\boldsymbol{J}$ fixé) identifier $r_0 = \beta(PC)\, Q + \gamma(PC)\, I_3$ (où l'opération PC est le passage particule-antiparticule) et $q_4^2 = -\beta'^2\, \dfrac{Y^2}{4}$, où Q désigne la charge et Y l'hypercharge, β, β', γ étant des « constantes d'identification » ; on pourra aussi, si on le trouve plus commode, identifier $q_4^2 = -\eta^2\, \boldsymbol{I}^2 - \beta'^2\, \dfrac{Y^2}{4}$ (η : constante). En appliquant la relation de Gell-Mann-Nishijima, et en posant $\beta + \gamma = \delta$, on aura la formule :

$$m^2 = \left(\mathscr{C} + \frac{1}{\alpha^2} J^2\right) - \mathscr{C}_1\, \beta(PC)\, Y + \left(\frac{1}{\alpha^2} - \eta^2\right)\boldsymbol{I}^2 -$$

$$- 2\left(\mathscr{C}_1\, \delta + \frac{1}{\alpha^2}\, \lambda(J)\right)(PC)\, I_3 + \beta\delta I_3\, Y + \delta^2\, I_3^2 + (\beta^2 - \beta'^2)\, \frac{Y^2}{4}\,.$$

Remarquons que l'identification $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$ et $\boldsymbol{J} = \exp(2\,\alpha ad q_4)\, \boldsymbol{R}$, c'est-à-dire le fait de considérer que l'on obtient $\boldsymbol{J}$ à partir de $\boldsymbol{I}$ à l'aide d'un automorphisme spécial (lequel s'exprime à l'aide de l'étrangeté S, en vertu de l'identification faite de q_4^2) est parfaitement compatible avec la relation de phase

$(-1)^{2(I-J)} = (-1)^S$ (obtenue à partir des relations $(-1)^{2I} = (-1)^Y$ et $(-1)^{B+L} = (-1)^{2J}$, citées plus haut), laquelle montre que, pour S fixé, I et J ne sont pas indépendants ; cet automorphisme donne une sorte de « *J-I* symétrie ».

Remarquons en outre que la présence de J^2, de $\alpha = \alpha(J)$, et de $\lambda(J)$ dans la formule indique une sorte de « J^P *assignment* », obtenu en fixant J quand on passe des représentations de $\mathfrak{U}$ à celles de (classification) de $\mathfrak{sl}(3, C)$ (J ne figurant pas dans l'intersection $\mathscr{P} \cap \mathfrak{X}$). Si $\beta^2 = \beta'^2$, on n'aura pas de terme en Y^2 : on verra que l'expérience suggère une telle identification. On a ici deux sortes de coefficients, les uns ($\mathscr{C}$, $\mathscr{C}_1$, α, $\lambda(J)$) dépendent *a priori* de la représentation de classification, les autres (β - et β' -, δ, et éventuellement η) étant des « coefficients d'identification », qui n'en dépendent pas nécessairement. On trouve alors la *formule de masse* suivante :

$$m^2 = m_0^2 - a(PC)\,Y + bI(I+1) + cYI_3 - d(PC)\,I_3 + eI_3^2 (+ fY^2),$$

où m_0^2, a, b, d dépendent (*a priori*) de la représentation et c, e (et f) n'en dépendent pas nécessairement.

Comme la moyenne sur chaque isomultiplet $< I_3^2 > = \frac{1}{3} I(I+1)$ on aura la *formule forte* (on fait $f = 0$) :

$$< m^2 > = m_0^2 - a(PC)\,Y + \left(b + \frac{e}{3}\right) I(I+1),$$

et la *correction électromagnétique* (de moyenne nulle sur chaque isomultiplet) $cYI_3 - d(PC)\,I_3 + e(I_3^2 - \frac{1}{3}\,I(I+1))$; il convient de remarquer que même avec des identifications de générateurs un peu différentes de celles faites ici, on aura une formule forte analogue. Expérimentalement, on trouve que m_0^2, a, b sont bien plus grands que c, d, e (lesquels peuvent actuellement être considérés comme constants lorsque J varie), c et d étant eux-mêmes supérieurs à e (c'est-à-dire que $|\delta| < |\beta|$) ; ceci indique que la contribution numérique des « invariants » $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_1$ (ainsi que celle de α^{-1}) dans la formule est bien supérieure à celles des « coefficients d'identification ».

7. Vérification expérimentale de la formule de masse (cf. ([25])). Nous avons donc obtenu la formule suivante (formule « forte et électromagnétique ») :

$$(1)\quad m^2 = m_0^2 - a(PC)\,Y + bI(I+1) + cYI_3 - d(PC)\,I_3 + eI_3^2 (+ fY^2),$$

où m_0^2, a, b, d sont des coefficients numériques dépendant (au moins *a priori*) du spin J^P (à l'aide duquel on classifie les particules) alors que c, e, et éventuellement f, sont des coefficients « d'identification » qui peuvent, ou non, dépendre de J (suivant que l'identification des termes r_0 et q_4^2 appa-

raissant dans la formule de masse « brute » obtenue en fonction des nombres quantiques « internes » n'est pas, ou est, la même pour toutes les représentations de classification) ; e est positif et les signes des autres coefficients sont *a priori* quelconques.

En définissant les *masses fortes* comme les moyennes quadratiques des masses de chaque isomultiplet, $< m^2 >^{1/2}$, et en tenant compte de la relation suivante :

$< I_3^2 >$ = (moyenne de I_3^2 sur un isomultiplet d'isospin I) = $\frac{1}{3} I(I+1)$, qu'il est aisé de vérifier (que I soit entier ou demi-entier), on aura la « *formule forte* », suivante, où $b' = b + \frac{1}{3} e$:

$$(2) \qquad < m^2 > = m_0^2 - a(PC)\, Y + b'\, I(I+1)\, (+ fY^2)\,.$$

Si alors on applique cette formule au cas de l'« octet » de spin $\frac{1}{2}^+$, on trouve numériquement $-f \simeq 0{,}0010 \pm 0{,}0015$ BeV^2, c'est-à-dire que dans ce cas on peut considérer le terme en Y^2 comme ayant un coefficient nul. Dans le cas du « décuplet » de spin $\frac{3}{2}^+$, on a, phénoménologiquement, $I = 1 + \frac{Y}{2}$, d'où $Y^2 = 4I(I+1) - 6\,Y - 8$: dans ce cas, on aura nécessairement une relation de compatibilité comme conséquence de (2) (relation sur laquelle nous reviendrons), et de plus rien ne s'oppose à ce que l'on fasse $f = 0$; nous verrons que la formule (2) est encore très bien vérifiée pour le spin $\frac{5}{2}^+$ si l'on y fait $f = 0$. Par conséquent, il est parfaitement convenable de supposer que $\beta^2 = \beta'^2$ dans la formule obtenue à la fin du paragraphe précédent, et que ces coefficients (« d'identification ») sont constants lorsque le spin varie. On n'a ainsi *pas de terme en Y^2 dans les formules de masse.*

Pour ce qui est du terme en I_3^2, on remarque tout d'abord que I_3^2 lui-même ne devient sensible que pour $I = \frac{3}{2}$ ou plus. Or on peut voir que le coefficient e est (s'il existe) de l'ordre de 2.10^{-3} BeV^2, alors que $c \simeq 6.10^{-3}$ BeV^2 et $d \simeq 8.10^{-3}$, pour le spin $\frac{1}{2}^+$, et que ces valeurs numériques sont également convenables dans le cas du spin $\frac{3}{2}^+$ (pour les autres spins, on n'a pas d'informations expérimentales pour la formule « électromagnétique »), les coefficients a et b (et m_0^2) ayant des valeurs bien supérieures (de l'ordre de 9.10^{-2} BeV^2 pour b, le plus petit pour ces deux spins). Ainsi d'une part l'introduction d'un terme en I_3^2 n'est pas sensible dans la formule forte, eu égard à la précision des expériences, et d'autre part, dans la formule électromagnétique, la présence d'un tel terme n'est pas actuellement (comme on le verra) établie de façon certaine par les résultats expérimentaux (il n'y a que des indications en sa faveur).

Passons maintenant à un bref exposé de la vérification des formules (1) et (2), avec $f = 0$, dans le cas des *baryons de parité positive.*

Pour l'« octet » de spin $\frac{1}{2}^+$, en notant m_P la masse de la particule $P(J^P, I, Y, m_P)$ ou la masse forte de l'isomultiplet correspondant (dans le cas

de la formule forte), on tire de (2) (avec $f = 0$) la *relation de compatibilité* suivante :

$$4(m_N^2 + m_\Xi^2) = 3\, m_\Sigma^2 + 5\, m_\Lambda^2 , \tag{3}$$

qui est vérifiée avec une précision de 0,5 °/₀₀ pour une marge expérimentale de 0,8 °/₀₀ ; notons que, dans ce cas, la formule d'Okubo-Gell-Mann présente un écart de 5 °/₀₀. La précision de la vérification de cette relation confirme alors la relation de compatibilité « électromagnétique » (si l'on néglige le terme en I_3^2, il y en a deux : cf. ([25])) :

$$(m_{\Xi^-}^2 - m_{\Xi^0}^2) + (m_n^2 - m_p^2) = (m_{\Sigma^-}^2 - m_{\Sigma^+}^2)$$

que l'on tire de (1), à cause de la définition de la masse forte d'un isomultiplet (car (3) n'est plus vérifiée si l'on remplace par exemple m_Σ par m_Σ). On peut d'ailleurs (cf. ([25])) utiliser (1) et (3) pour préciser les valeurs des masses des particules de spin $\frac{1}{2}^+$. La formule est évidemment la même pour les antiparticules des précédentes. Dans le cas de cet « octet », la seule indication qu'on ait en faveur du terme en I_3^2 est la valeur de m_{Σ^-}, que les expériences les plus récentes trouvent autour de 1197 MeV (au lieu de 1196 comme précédemment).

Dans le cas du spin $\frac{3}{2}^+$, on a, avec le quadruplet Δ, le triplet Y_{13}^*, le doublet Ξ_{13}^*, et le singulet Ω^-, une relation de compatibilité forte, qui s'écrit

$$m_{\Omega^-}^2 + 3\, m_{Y_{13}^*}^2 = m_\Delta^2 + 3\, m_{\Xi_{13}^*}^2 \tag{4}$$

et est vérifiée avec une précision de 0,35 °/₀₀ pour une marge de 1,8 °/₀₀. On a aussi 3 (ou 4 si l'on néglige le terme en I_3^2) relations de compatibilité électromagnétiques, dont une seule peut actuellement être considérée comme vérifiée expérimentalement (encore que l'expérience ne soit pas très précise) :

$$(m_{\Xi_{13}^{*0}}^2 - m_{\Xi_{13}^{*-}}^2) + (m_{\Delta^+}^2 - m_{\Delta^0}^2) = m_{Y_{13}^{*+}}^2 - m_{Y_{13}^{*-}}^2 .$$

L'indication la plus sérieuse en faveur du terme en I_3^2 est fournie par les plus récentes valeurs des différences de masse des particules Δ : il semblerait en effet (cf. Olsson, Phys. Rev. Letters, *14*, 118 (1965)) que $m_{\Delta^{++}}$ soit (très voisine et) légèrement supérieure à m_{Δ^+}.

Pour le spin $\frac{5}{2}^+$, notons tout d'abord que, contrairement à ce que l'on pensait comme plus probable fin 1964, une particule $Y_1^*(?, 1, 0, 1660 \pm 10)$ pourrait bien avoir un spin $\frac{5}{2}^+$ (comme nous l'avions prévu dans ([25])) : il est bien possible que sa parité soit positive et son spin $\geqslant \frac{3}{2}$; il semble de plus fort probable que la particule $\Xi_1^*(?, \frac{1}{2}, -1, 1820 \pm 7)$, dont le spin est sans doute $(\frac{3}{2})^-$ ou $(\frac{5}{2})^+$, est celle que l'on obtient avec $N_{15}^*(\frac{5}{2}^+, \frac{1}{2}, 1, 1688)$ et $Y_{05}^*(\frac{5}{2}^+, 0, 0, 1815)$, en appliquant la relation :

(5) $$4(m^{2*}_{N\,1\,5} + m^{2*}_{\Xi_1}) = 3\, m^{2*}_{Y_1} + 5\, m^{2*}_{Y_0\,5}$$

que l'on tire de (2) (de même qu'on en a tiré (3)), et qui est alors vérifiée à une précision de 1,2 °/₀₀ pour une marge de 3 °/₀₀. Notons qu'il n'existe actuellement aucune autre formule qui donne une masse convenable pour Ξ_1^* (la formule d'Okubo donne 1 865 MeV, et les autres formules s'en écartent encore plus).

Dans le cas des *mésons de parité négative*, on trouve phénoménologiquement qu'il convient de remplacer dans la formule forte (2) l'hypercharge Y par un nombre quantique entier n (une sorte de nombre quantique principal, sans doute), et d'écrire :

(6) $$< m^2 > = m_0^2 + an + bI(I+1)\,.$$

Dans le cas du spin 0^-, avec η, K, π, et $(\eta\ 2\ \pi)$, en éliminant m_0^2, a, b, on trouve :

$$\frac{8\, m_K^2 - 3\, m_\pi^2 - 5\, m_\eta^2}{m^2_{(\eta 2\pi)} - m_\eta^2} = \frac{8\, n_K - 3\, n_\pi - 5\, n_\eta}{n_{(\eta 2\pi)} - n_\eta} = \frac{2}{3}$$

à mieux que 1 °/₀₀ près.
En prenant $n_\eta = 1$, $n_K = 2$, $n_\pi = 3$, $n_{(\eta 2\pi)} = 4$ (n distingue ainsi η de $(\eta\ 2\ \pi)$) on obtient alors (cf. ([25])) une relation de compatibilité vérifiée avec une précision de 0,8 °/₀₀ pour une marge tolérée de 1,5 °/₀₀. Dans le cas du spin 1^-, on prendra ρ, K^*, φ et ω ; ici, l'expérience n'est pas aussi précise et ne permet pas d'assigner en toute certitude des valeurs de n aux diverses particules ; en prenant pour n les valeurs 0, 2, 4 et 1 (respectivement), on trouve une relation de compatibilité très bien vérifiée expérimentalement. Dans les deux cas, en attribuant diverses valeurs à n, on peut prévoir certaines particules.

Dans le cas de la parité négative pour les baryons (et positive pour les mésons), on ne peut actuellement rien dire qui confirme ou infirme la validité de la formule proposée.

8. Le groupe conforme et certains sous-groupes. Cunningham et Bateman, qui l'ont introduit en physique ([4]), avaient déjà mis en relief l'invariance des équations de Maxwell ($m = 0$, en espace-temps plat) sous ce groupe à 15 paramètres, localement isomorphe à O(4, 2) — dont la composante connexe de l'identité est un quotient de SU(2, 2) par un groupe discret. En tant que tel, ce groupe est intéressant au point de vue du formalisme externe, et il y a eu plusieurs tentatives d'étendre à ce groupe la théorie de la relativité, de voir quelles équations il conservait, etc. (cf. ([5]) ([7]) ([10]) ([11])). Au sens le plus « naïf » du formalisme « interne », Dirac avait déjà, en 1938 ([5]) introduit ce groupe à propos du rayonnement de l'électron étendu. On propose ici de le considérer comme groupe de l'unification (comme on le

verra plus loin) de $\mathfrak{su}(2, 1)$ et de $\mathscr{P}$ (ou d'algèbres de de Sitter), par exemple, où SU(2, 1) sera pris comme étant le groupe fort. A ce propos, on peut faire les remarques qui suivent :

a) Aux énergies d'interactions fortes actuellement utilisées, $\mathfrak{su}(2, 1)$ est l'algèbre « interne » (forte) et $\mathscr{P}$ celle d'invariance relativiste, l'unification étant un processus quelque peu artificiel, servant à rendre compte des phénomènes concernant la masse des particules, etc ; à des énergies bien plus fortes, la masse matérielle sera négligeable par rapport à l'énergie mise en jeu dans l'interaction, et l'unification $\mathscr{S}$ deviendra (à la limite) l'algèbre du groupe d'invariance de ces « très fortes » interactions, puisque SU(2, 2) rend compte du cas de masse nulle.

b) On pourra calculer les champs de Yang et Mills en considérant SU(2, 2) (pour des énergies très élevées), ou SU(2, 1) (pour celles rencontrées aujourd'hui) unifiée avec **P**, comme opérant dans l'hyperplan tangent en différents points de l'espace (courbe) de Riemann.

c) Comme le groupe conforme contient aussi des accélérations, et ne conserve invariante que la masse nulle (il s'ajoute à la masse relativiste une contribution du type énergie potentielle) l'opérateur de (carré de) la masse, dans $\mathscr{S}$, ne sera pas nécessairement $g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$. On pourra par exemple considérer que ce dernier est donné par $\frac{1}{2} g^{\mu\nu}(p_\mu A_\nu + A_\mu p_\nu)$, ce qui aura en outre l'avantage de le rendre P-invariant (si l'on définit P comme automorphisme correspondant à une décomposition de Cartan de $\mathscr{S}$ — cf. chapitre I).

d) En utilisant le fait que $\mathscr{P} = \lim_{\rho \to 0} \mathfrak{so}_\rho(4,1)$ (que nous expliciterons plus loin) on pourra par exemple « approcher » les p_μ par des générateurs p'_μ non commutatifs entre eux, ce qui suggère le passage dans ce cas à un nouveau « niveau » de relations de commutation, « plus fin » que le niveau quantique ; dans ce niveau, on pourra obtenir une quantification de ce qui sera ici l'impulsion spatiale à l'aide des représentations infinies anti-hermitiennes (unitaires pour le groupe) du $\mathfrak{so}_\rho(4, 1)$ correspondant. En utilisant $\mathfrak{so}_\rho(3, 2)$, on pourra de même quantifier ce qui sera ici p'_4.

L'algèbre de Lie $\mathscr{S}$ du groupe conforme peut être considérée à plusieurs points de vue comme unification (de $\mathscr{P}$ et d'autres algèbres essentiellement). Remarquons tout d'abord que $\mathscr{P} = \lim_{\rho \to 0} \mathfrak{so}_\rho(4,1) = \lim_{\rho \to 0} \mathfrak{so}_\rho(3, 2)$ où l'algèbre $\mathfrak{so}_\rho(4,1)$ est engendrée par les générateurs (a_k, a'_k, b_k, c_1) de l'algèbre (de de Sitter) $\mathfrak{so}(4,1)$ (pris dans $\mathscr{S}$), avec les mêmes relations de commutation sauf pour ce qui est de $[a'_i, a'_j]_\rho = \rho^2 \varepsilon_{ijk} a_k$ et de $[a'_k, c_1]_\rho = \rho^2 b_k$; et de même pour $\mathfrak{so}_\rho(3, 2)$, avec les générateurs (a_k, b_k, b'_k, c_2) et

$$[b'_i, b'_j]_\rho = -\rho^2 \varepsilon_{ijk} a_k, \quad [b'_k, c_2]_\rho = -\rho^2 b_k .$$

On a vu au chapitre II que $\mathscr{S} = U(\mathscr{P}, \mathfrak{su}(2,1))$, avec intersection sur l'algèbre nilpotente d'ordre 3 non commutative $\mathfrak{g}_3$

$$([x_1, x_2] = x_3, [x_2, x_3] = 0 = [x_1, x_3]),$$

qui est d'ailleurs l'algèbre de Lie des relations de commutation canoniques, et est également limite de $\mathfrak{so}_\rho(3)$

$$([x_1, x_2] = x_3, [x_2, x_3] = \rho^2 x_1, [x_3, x_1] = \rho^2 x_2)$$

et aussi de $\mathfrak{so}_\rho(2, 1)$

$$([x_1, x_2] = x_3, [x_2, x_3] = \rho^2 x_1, [x_1, x_3] = \rho^2 x_2).$$

On voit aisément que l'on a $\mathscr{S} = U(\mathfrak{su}(2, 1), \mathfrak{so}(3, 2))$ avec intersection sur $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) = \mathfrak{so}(2, 1)$ (engendrée par $c_2 - a_1$, $b'_2 + b_3$, $b_2 - b'_3$ si on représente $\mathfrak{su}(2, 1)$ dans $\mathscr{S}$ comme au chapitre II), et aussi $\mathscr{S} = U(\mathfrak{su}(2 ,1), \mathfrak{so}(4, 1))$ avec intersection sur $\mathfrak{so}(3)$ (engendrée par les $\frac{1}{2}(a_k + a'_k)$). On a aussi $\mathscr{S} = U(\mathscr{P}, \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1), \mathfrak{u}(1))$ sans intersection (où $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{u}(1)$ est une sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{su}(2, 1)$ et le $\mathfrak{u}(1)$ engendré par la dilatation A_0), $\mathscr{S} = U(\mathscr{P}, \mathfrak{so}(4, 1), \mathfrak{u}(1))$ avec intersection sur $\mathfrak{L}((a_k, b_k))$, et de même pour $\mathfrak{so}(3, 2)$. On a encore $\mathscr{S} = U(\mathscr{P}, \mathscr{P}', \mathfrak{u}(1))$ avec intersection sur $\mathfrak{L}$ (où $\mathscr{P}' = (a_k, b_k, A_\mu)$), soit aussi $\mathscr{S} = U(\mathscr{P}, \mathrm{Dér}(\mathscr{P}'))$, et enfin évidemment l'unification banale $\mathscr{S} = U(\mathscr{P}, \mathscr{S})$.

Les invariants fondamentaux de $\mathscr{S}$ peuvent s'écrire, en posant

$$\boldsymbol{J} = (a_k), \boldsymbol{N} = (b_k), \boldsymbol{A} = (A_k), \boldsymbol{p} = (p_k) \ :$$

$$\mathscr{F}_1 = \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2 - g^{\mu\nu}\,\overline{p_\mu A_\nu} - A_0^2 .$$

$$\mathscr{F}_2 = 2\,A_0(\boldsymbol{J}.\boldsymbol{N}) + (\boldsymbol{J}.\boldsymbol{p})\,A_4 - (\boldsymbol{J}.\boldsymbol{A})\,p_4 + \boldsymbol{N}.(\boldsymbol{P} \wedge \boldsymbol{A}) .$$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}_3 = {} & \overline{(g^{\mu\nu}\,p_\mu\,p_\nu)\,(g^{\rho\sigma}\,A_\rho\,A_\sigma)} + (A_0^2 + \boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{N}^2)^2 + 4(\boldsymbol{J}.\boldsymbol{N})^2 + \\ & + g^{\mu\nu}\,\overline{A_\mu\,p_\nu(A_0^2 - \tfrac{1}{2}\,M_{\rho\sigma}\,M_{\rho\sigma})} \\ & + \delta_{\alpha\beta\lambda\lambda'}(g_{\mu\sigma}\,g_{\sigma\mu'} - g_{\mu\mu'})\,\overline{A_\alpha\,p_\beta(M_{\lambda\mu}\,M_{\lambda'\mu'} + \tfrac{1}{4}\,\varepsilon_{\lambda\nu\tau\mu}\,\varepsilon_{\lambda'\nu'\tau'\mu'}\,M_{\nu\tau}\,M_{\nu'\tau'})} \\ & + 4\,g^{\mu\mu'}\,g^{\nu\nu'}\,\overline{p_{\mu'}\,A_{\nu'}(g^{\rho\sigma}\,M_{\mu\sigma}\,M_{\rho\nu} + A_0\,M_{\mu\nu})}\end{aligned}$$

où $\delta_{\alpha\beta\lambda\lambda'} = 1$ si tous les indices sont égaux, 0 sinon ; et où l'on surmonte d'un trait les expressions à symétriser (au sens défini au 6).

Les coefficients des représentations irréductibles seront (cf. Racah ([34])) complètement caractérisés par $r = l(l + 2) = 15$ opérateurs (dans l'algèbre enveloppante) commutant entre eux (on aura les mêmes fonctions propres, et on pourra caractériser les représentations par les valeurs propres). On a déjà $l = 3$ invariants fondamentaux. Si l'on prend les valeurs, dans les algèbres de Lie du 1er et du 2e groupes de paramètres, d'opérateurs non

invariants, on obtiendra des résultats différents : il nous suffit donc de trouver $\frac{r-l}{2} = 6$ opérateurs supplémentaires. On prendra alors les $l = 3$ éléments d'une sous-algèbre de Cartan, et les $\frac{r-3l}{2} = 3$ invariants des autres algèbres emboîtées successives de la chaîne d'algèbre de type a_n : $\mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{su}(2,1) \subset \mathfrak{su}(2,2)$ (qui commuteront avec la sous-algèbre de Cartan, dans le cas de a_l). Alternativement, on peut aussi considérer la chaîne $\mathfrak{so}(4,2) \supset (\mathfrak{so}(4,1)$ et $\mathfrak{so}(3,2)) \supset \mathfrak{so}(3,1) \supset \mathfrak{so}(3) \supset \mathfrak{so}(2)$, puisqu'ici on a $a_3 \approx b_3$, et les invariants successifs nous fourniront les $\frac{r-l}{2}$ opérateurs voulus.

Conformément à notre traitement général, on obtient une formule de masse en corrigeant l'opérateur de masse de façon à avoir un invariant global de l'unification, lequel devra nécessairement s'exprimer à l'aide des invariants fondamentaux $\mathscr{F}_1$, $\mathscr{F}_2$ et $\mathscr{F}_3$ ci-dessus, puis en exprimant (si possible) la correction à l'aide des nombres quantiques internes. Tout ceci posera évidemment des problèmes quant au spectre des opérateurs intervenant dans la formule, problèmes liés à ceux des représentations infinies unitaires de $\mathscr{S}$, et dans lesquels nous n'entrerons pas ici. Si on considère l'opérateur de masse (ou plutôt, du carré de la masse) comme étant $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu$, il sera convenable de considérer une combinaison (pas nécessairement linéaire) des invariants fondamentaux de la forme $\mathscr{F}_3 +$ (autre chose) (en prenant alors $g^{\mu\nu}\, A_\mu\, A_\nu$ comme un des opérateurs caractérisant les représentations de $\mathscr{S}$). Mais on pourra aussi essayer de prendre pour opérateur de (carré de la) masse $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, A_\nu$, ce qui, dans $\mathscr{S}$, a un sens physique, auquel cas on prendra l'invariant (opérateur de Casimir) $\mathscr{F}_1$. Dans une optique tout à fait différente, on pourrait considérer que l'on obtient le spectre de masse Δm^2 comme combinaison des invariants de la sous-algèbre compacte maximale de $\mathfrak{su}(2,1)$ (pour $\mathscr{S} = U(\mathscr{P}, \mathfrak{su}(2,1))$, suivant ainsi une démarche semblable à celle de la « restriction unitaire » en mathématiques ; on retomberait alors sur une formule forte du type $\Delta m^2 \equiv m^2 - m_0^2 = a(PC)\, Y + bI(I+1)$, où le problème du spectre dans les représentations finies ne se poserait pas, pour ce qui est de la correction du moins.

Avant de conclure ce paragraphe, examinons d'abord rapidement les diverses possibilités d'unification concernant les algèbres de de Sitter $\mathfrak{so}(4,1)$ et $\mathfrak{so}(3,2)$. Nous avons déjà vu la possibilité de construire l'unification $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{u}(1)) = \mathfrak{X}.\mathscr{R}_0$ (où $\mathfrak{X} = \mathfrak{so}(4,1)$), produit semi-direct avec un idéal de dimension 10, commutatif, défini par la représentation adjointe (qui se décompose sur le $\mathfrak{L}$ de $\mathfrak{so}(4,1)$ en $D_N \oplus ad\mathfrak{L}$) ; en notant p_k, p_4, q_k, q'_k les générateurs de cet idéal, on aura un invariant global de la forme $\boldsymbol{p}^2 - p_4^2 + \boldsymbol{q}^2 - \boldsymbol{q}'^2$ ($\boldsymbol{p}^2 = \sum_1^3 p_k^2$, et de même pour $\boldsymbol{q}^2$ et $\boldsymbol{q}'^2$). Pour

ce qui est de $\mathfrak{so}(3, 2)$, on aura de même (avec l'adjointe) une unification semblable, et un invariant global analogue. On pourra alors, en considérant l'une ou l'autre de ces algèbres comme algèbre interne, essayer d'exprimer la « correction » de $g^{\mu\nu}\, p_\mu\, p_\nu$ à l'aide de nombres quantiques internes. Il y a encore d'autres unifications possibles, si l'on cherche $U(\mathscr{P}, \mathfrak{X}, \mathrm{u}(1))$: outre $\mathscr{S}$, on peut considérer l'algèbre $\mathfrak{X}$ « inhomogène » en formant un produit semi-direct avec un idéal (commutatif) de dimension 5, à l'aide de la représentation « orthogonale » de base (une base convenable de l'algèbre pouvant se représenter par des matrices réelles symétriques ou antisymétriques).

Enfin, comme nous l'avons signalé à plusieurs reprises, il se posera la question des représentations infinies unitaires des groupes utilisés. On sait ([29]) que toutes les représentations d'un groupe de Lie semi-simple connexe sont de type I, et qu'il en est de même pour le groupe de Poincaré (d'après les résultats de Mackey sur les représentations d'extensions de groupes). Les représentations infinies unitaires des groupes $\mathrm{SU}(p, q)$ $(p \geqslant q)$ ont été étudiées par Graev ([28]), qui a trouvé $q + 1$ séries principales de représentations $d_0, \ldots, d_q$ (ce qui correspond à la possibilité de prendre 0, 1, ..., q générateurs d'une sous-algèbre de Cartan dans la partie non compacte), d_0 étant caractérisée par $p + q - 1$ nombres prenant des valeurs discrètes. De nombreux autres auteurs ont d'ailleurs étudié le problème des représentations infinies unitaires (représentations induites notamment) des groupes de Lie. Il sera également très intéressant de développer la théorie des représentations (« locales ») d'algèbres de Lie contenant $\mathscr{P}$ (comme $\mathscr{S}$ ou $\mathfrak{sl}(3, \mathbf{C})$ « inhomogène ») et d'y étudier le spectre de l'opérateur représentant $g^{\mu\nu}\, p_\mu p_\nu$, par exemple, ainsi que leurs propriétés en général.

Nous terminerons ce travail par une remarque ; on a vu les difficultés soulevées à propos de la formule de masse par la non-compacité des groupes étudiés, la nilpotence des p_μ dans les représentations finies, etc... ; pour donner un sens à la formule de masse, on a vu qu'il fallait considérer des représentations de dimension infinie (qui d'ailleurs ne donneront pas toujours le résultat escompté quant aux valeurs propres des opérateurs entrant dans la formule). Nous avons alors introduit un principe de classification, qui permet de donner un sens formel à la formule de masse obtenue (qui est bien vérifiée par l'expérience) et de classifier de la façon habituelle les particules. Mathématiquement, ce principe pose le problème des rapports existant entre certaines représentations infinies unitaires et certaines représentations finies ; physiquement, ce principe lui aussi suggère l'existence d'un lien possible entre notre milieu quantique et un milieu dit subquantique.

BIBLIOGRAPHIE

1 Roman P., *Theory of elementary particles*, North-Holland Publishing Co. Amsterdam (1961).
2 Bohm D., Flato, M. Halbwachs F., Hillion P., Vigier J. P., *Nuovo Cimento*, **36** (1965), 672.
3 De Broglie L., Bohm, Halbwachs, Hillion, Takabayasi, Vigier, *Phys. Rev.*, **129** (1963), 438, 451.
4 Cunningham E., *Proc. London Math. Soc.*, **8** (1909) 77.
Bateman H., *Ibid.*, **8** (1910), 223.
5 Dirac P. A. M., *Proc. Royal Soc. London*, **A 177** (1938), 148.
6 Flato M., Rideau G., Vigier J. P., *Nucl. Phys.*, **61** (1965), 250.
7 Fulton T., Rohrlich R., Witten L., *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 442.
8 Naimark M. A., *Les représentations linéaires du groupe de Lorentz*, Dunod, Paris (1962).
9 Ono S. P., Preprint (College of General Education, Univ. of Tokyo, 1961).
10 Page L., *Phys. Rev.*, **49** (1936), 254, 466, 946.
11 Schouten J. A., Hantjes J., *Konikl. Ned. Acad. Wet. Proc.*, **43** (1940), 1288.
12 Bourbaki N., *Algèbres de Lie*. Hermann, Paris (1960).
13 Chevalley C., *Theory of Lie groups*. I. Princeton Univ. Press (1946). *Théorie des groupes de Lie*. II, III. Hermann, Paris (1951, 1955).
14 E. B. Dynkin *A. M. S., Translations Ser.* 2, Vol. 6 (1957) 111, 245 (en russe, 1952).
15 Flato M., *Conférences dans les Séminaires de Physique Théorique de Marseille et de Turin* (mai 1964).
16 Flato M., Sternheimer D. (à paraître *J. Math. Phys.*, 7, été 1966), et *Compt. Rend.* **260** (1965), 3532.
17 Freudenthal H., *Math. Annalen.* **156** (1964), 263.
18 Gardiner C. W., *Phys. Lett* **11.**, (1964), 3.
19 Helgason S., *Differential geometry and symmetric spaces*. Acad. Press, N. Y. (1962).
20 W. D. Mc Glinn, *Phys. Rev. Letters*, **12** (1964), 467.
21 Malcev A. I., *A. M. S. Translations*, Ser. 1, vol. 9 (1962), 214 (en russe, 1945).
22 Michel L., *Extensions centrales du groupe de Poincaré* (communication privée, 1964) [et *Nucl. Phys.*, **57**, 356, (1964)].
23 Sudarshan E. C. G., et coll. *Phys. Rev.* **136**, B 888, (1964).
24 Bronzan & Low, *Phys. Rev. Letters*, **12** (1964), 522.
25 Flato M., Sternheimer J., *Comptes Rendus*, **259** (1964), 3455.
26 Gell-Mann M., *Phys. Rev.*, **125** (1962), 1067.
27 Glashow S. L., Sakurai J. J., *Nuovo Cimento* (1962), **25**, 377 ; **26**, 622.
28 Graev M. L., *D. A. N.* (URSS), **98** (1954), 517.
29 Harish-Chandra, *Trans. AMS*, **75** (1953), 185 ; **76** (1954), 26.
30 M. Ikeda, Ogawa S., Ohnuki Y., *Progr. Theor. Phys.*, **22** (1959), 715 ; **23** (1960), 1073.

31 LURCAT F., MICHEL L., *Nuovo Cimento.*, **21** (1961), 574.
32 NEEMAN Y., *Nucl. Phys.*, **26** (1961), 222.
33 OKUBO, S. *Progr. Theor. Phys.* (1962), **27**, 5 ; **28**, 1.
34 RACAH G., *Group theory and Spectroscopy* (Princeton, 1951).
35 SAKURAI J. J., *Annals of Physics*, **11** (1960), 1.
36 YANG C. N., MILLS R. L., *Phys. Rev.*, **96** (1954), 191.

TABLE DES MATIÈRES

Préface

Prolégomènes .....

Quelques remarques sur les théories existantes des interactions fortes 1

Introduction

Position du problème 11

Chapitre premier

Groupes lorentziens et géométrie d'espace-temps..... 15

Chapitre II

Lien entre les formalismes interne et externe 45

Chapitre III

Applications à la théorie des interactions fortes 101

Imprimé en France. — Imprimerie JOUVE, 12, rue de Tournon, PARIS. — 2-1967
1er trimestre 1967

Dépôt légal éd. : 1476 [6558] N° de code : 530-85